DE STREKKING EN HET BESTAANSRECHT DER METAPHYSICA IN VERBAND MET DE TOEKOMST DER WIJSBEGEERTE

door

Dr. E. W. BETH [1]).

Beschouwen wij de lotgevallen van de verschillende onderdeelen der speculatieve wijsbegeerte van den tijd van Aristoteles — hem toch danken wij de oudste ons overgeleverde stelselmatige uiteenzettingen — tot op den dag van heden, dan treft ons een verrassend onderscheid.

De logica, uitgewerkt door de peripatetici en herzien door de stoicijnen, heeft zich bijna twintig eeuwen lang ongewijzigd kunnen handhaven. Pas in de zeventiende eeuw wordt op haar gebied een streven naar vernieuwing merkbaar, dat in de laatste honderd jaar heeft geleid tot een merkwaardige herleving van het zuiver logisch onderzoek. Dit onderzoek heeft resultaten opgeleverd, welker belang de wetenschappelijke wereld, zij het na een vrij langdurige aarzeling, vrijwel eenstemmig heeft erkend; zoodoende is een moderne logica, de zg. symbolische logica of logistiek, ontstaan, waarvan kan worden aangetoond, dat zij de legitieme voortzetting vormt de logica van Aristoteles [2]).

De metaphysica daarentegen heeft van den aanvang af een geleidelijke, zij het rijk geschakeerde, ontwikkeling doorgemaakt, die over het algemeen nauw verband hield met den gelijktijdigen voortgang van het wetenschappelijk onderzoek, en die bijgevolg door de aanvalsgolven der skepsis niet kon worden verstoord. In den nieuweren tijd — laat ons zeggen sinds Hume en Kant — heeft ze evenwel het contact met de levende wetenschap vrij plotseling verloren. Ze heeft zelfs in toenemende mate blootgestaan aan

---

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleeraar aan de Universiteit van Amsterdam op 23 Sept. 1946.

[2]) E. W. Beth, „Geschiedenis der logica", Den Haag 1944.

een felle bestrijding, die merkwaardigerwijs niet in de laatste plaats uitgaat van vertegenwoordigers der moderne logica.

Dat het de metaphysica aan verdedigers niet ontbreekt, behoeft nauwelijks te worden vermeld. Maar er bestaat onder hen zoo weinig eenheid van opvatting, dat hun pleitredenen aan de positie der metaphysica eer afbreuk doen, dan dat ze haar versterken.

Wij kunnen dus zonder veel gevaar voor tegenspraak vaststellen, dat er aanleiding is, naar het bestaansrecht der metaphysica een nader onderzoek in te stellen. Voor de resultaten van zulk een onderzoek moge ik thans een oogenblik Uw aandacht vragen.

Het lijkt mij gewenscht, dat ik, om de gedachten te bepalen, een voorloopige en noodgedwongen eenigszins onscherpe omschrijving geef van den term „metaphysica", om vervolgens te trachten, tot een meer nauwkeurige begripsomschrijving te geraken.

Ik zou dan de metaphysica als een leer van het absolute willen karakteriseeren en zou den gedachtengang, die pleegt te leiden tot het opstellen van zulk een leer, als volgt willen samenvatten. Datgene, waarmee de ondervinding ons in onmiddellijke aanraking brengt, blijkt bij nauwkeurige beschouwing steeds betrekkelijk te zijn. Wanneer wij de oorzaak van een verschijnsel hebben achterhaald, dan blijkt deze oorzaak bij nader inzien een verschijnsel te zijn, dat op zijn beurt veroorzaakt is. Wanneer iets uit iets anders is ontstaan, dan blijkt ook dit andere weer uit iets te zijn voortgekomen. Enzoovoort. Het denken echter kan bij het betrekkelijke niet blijven staan. Het completeert het betrekkelijke door een absolutum te stellen en komt er bv. in de zoojuist beschouwde gevallen noodzakelijk toe, een eerste oorzaak en een oerstof aan te nemen [1]).

Ik ben er mij wel van bewust, met deze korte uiteenzetting op de volgende uiteenzettingen vooruit te loopen, maar meen, dat zulk een voorloopige oriënteering niet kan worden gemist.

Wanneer we trachten, den term „metaphysica" scherp te omschrijven, dan stuiten wij nl. op groote moeilijkheden.

De omschrijvingen, die we bij de metaphysici zelf aantreffen, blijken sterk uiteen te loopen. Elke metaphysicus past de door hem gegeven omschrijving aan bij zijn bijzondere opvatting. Zoo vooronderstelt een omschrijving van de metaphysica als leer van het onstoffelijke, dat het absolute noodzakelijk onstoffelijk moet worden gedacht; zulk een omschrijving sluit ten onrechte het materialisme van te voren uit. Wie de metaphysica als leer van het bovennatuur-

---

[1]) Verg. bv. H. Spencer, „First principles", 5th ed., London 1893, pp. 96/97; F. L. R. Sassen, „Katholicisme en wijsgeerig denken", Amsterdam, blz. 12.

lijke bepaalt, sluit van te voren een opvatting uit, die het absolute vereenzelvigt met de natuur als geheel beschouwd en die het betrekkelijke bij een fragmentarische beschouwing van de natuur tevoorschijn laat komen.

Met dergelijke door een vooropgestelde meening beïnvloede omschrijvingen kunnen wij hier natuurlijk niets beginnen. Het gaat hier immers niet om het bestaansrecht van een materialistische, een spiritualistische, een naturalistische of een supra-naturalistische metaphysica, maar om het bestaansrecht van de metaphysica als zoodanig.

Een tweede bezwaar tegen de door de metaphysici zelf gegeven omschrijvingen is hierin gelegen, dat men bij deze omschrijvingen gebruik pleegt te maken van een terminologie, die van die der huidige wetenschap afwijkt. Willen we echter in het licht van de hedendaagsche wetenschap het bestaansrecht van de metaphysica beoordeelen, dan zullen we ons bij de omschrijving van den term „metaphysica" en bij de formuleering althans van de voornaamste metaphysische stellingen moeten bedienen van de terminologie — de taal of het begripsapparaat, zoo men wil — van de wetenschap van onzen tijd.

Wenden wij ons nu voor een begripsomschrijving der metaphysica tot haar bestrijders, dan worden wij opnieuw teleurgesteld. Het zijn altijd weer slechts op zichzelf staande begrippen, beweringen, problemen en redeneeringen, die, omdat zij in de huidige wetenschap als anachronismen aandoen, als „metaphysisch" worden afgewezen; van een stelselmatige bestrijding van de metaphysica — en juist zulk een bestrijding is zonder een strenge begripsomschrijving niet mogelijk — is zelden of nooit sprake [1]).

Bij het opstellen van een omschrijving van den term „metaphysica" met behulp van de terminologie der huidige wetenschap zijn we dus op eigen onderzoek aangewezen. Er is derhalve aanleiding tot het stellen van twee vragen; ten eerste: is zulk een omschrijving mogelijk en is ze ondubbelzinnig bepaald? — ten tweede: welke werkwijze dient bij het opstellen van zulk een omschrijving te worden gevolgd?

Dat een omschrijving van den term „metaphysica", als hier bedoeld, mogelijk is, hoop ik in het volgende te laten zien. Dat

---

[1]) A. Tarski, „The semantic conception of truth", Philos. and phenomenol. res. 4, 1944, p. 363: „When listening to discussions in this subject, sometimes one gets the impression that the term „metaphysical" has lost any objective meaning, and is merely used as a kind of professional invective."

de daar te geven omschrijving de eenig mogelijke is, zou ik echter niet gaarne beweren. Wel geloof ik, dat ze zich aanbeveelt door de vertrouwen wekkende omstandigheid, dat ze een verrassend helder licht werpt op de begrippen, beweringen, problemen en redeneeringen, die we in de verschillende metaphysische stelsels aantreffen; ze doet ons inzien, dat aan ieder, die het karakteristieke uitgangspunt der metaphysica eenmaal heeft aanvaard, deze begrippen, beweringen, problemen en redeneeringen zich onweerstaanbaar opdringen.

Den feitelijken grondslag voor het opstellen van de gezochte omschrijving vinden we uiteraard in de resultaten van het historisch onderzoek van de metaphysische systemen. Een uitsluitend historische beschouwing van deze systemen kan de gezochte omschrijving echter nimmer opleveren. Zulk een beschouwing kan ons de onderscheiden systemen in hun bijzondere karaktertrekken doen kennen; zij kan ons ook duidelijk maken, hoe het ééne systeem zich uit het andere heeft ontwikkeld onder invloed van wetenschappelijke en religieuze overtuigingen, van persoonlijke en maatschappelijke geestesbewegingen; het gemeenschappelijk uitgangspunt, de algemeene strekking, van deze systemen kan ze niet aan het licht brengen. Dit uitgangspunt en deze strekking zullen we echter zoo scherp mogelijk moeten vastleggen, om een gefundeerd oordeel te kunnen uitspreken met betrekking tot het bestaansrecht van de metaphysica als zoodanig; daartoe moeten we de zuiver historische beschouwing aanvullen met de logische analyse.

Bedienen we ons van deze laatste, dan moeten we evenwel bedacht zijn op een bron van fouten, die gelegen kan zijn in de pluriformiteit van de logica. Volgens hedendaagsch inzicht immers beantwoordt aan elke taal, dus ook aan elke terminologie, een bijzonder logisch systeem. De logische regels, die voor een bepaalde terminologie van kracht zijn, behoeven niet noodzakelijk voor een andere terminologie te gelden. Een nader onderzoek leert, dat inderdaad de terminologie der antieke wetenschap — waarvan de traditioneele terminologie der metaphysica deel uitmaakt — door andere logische regels wordt beheerscht, dan de terminologie der moderne wetenschap. Bij de behandeling van de verandering bv. maakt de antieke wetenschap gebruik van de door Aristoteles ingevoerde zg. modaliteitslogica, terwijl de moderne wetenschap zich, als bekend, van het functiebegrip en de infinitesimaalrekening bedient [1]).

---

1) Verg. noot 1, blz. 3.

Bij de behandeling van de grondslagen der metaphysica hebben we evenwel slechts te maken met logische regels, die voor de beide terminologieën gelijkelijk van kracht zijn; aan deze gelukkige omstandigheid danken we de mogelijkheid, althans deze grondslagen in de terminologie der moderne wetenschap weer te geven.

Na deze voorbereiding acht ik het verantwoord, ten deele in aansluiting bij L. Rougier en B. Schultzer[1]) een postulaat te formuleeren, dat in de verschillende metaphysische systemen wordt verondersteld.

Zijn er entiteiten *u* en *v*, zoodanig, dat *u* tot *v* de relatie *F* bezit, dan is er een entiteit *f* — het door de relatie *F* bepaalde *absolutum* —, zoodanig, dat, als de entiteit *x* niet identiek is met *f*, steeds *x* tot *f*, maar nooit *f* tot *x*, de relatie *F* bezit.

Aristoteles[2]) spreekt dit postulaat in de volgende bewoordingen uit: „Maar dat er eenig beginsel is en dat de gronden der dingen noch in opeenvolging, noch in onderscheiden geaardheid, oneindig zijn, is duidelijk." Het is in de wijsgeerige traditie overgegaan in den vorm van het adagium: „Non datur regressus in serie causarum in infinitum."

Van de toepassing van dit postulaat moge ik ter nadere toelichting enkele karakteristieke voorbeelden geven.

Nemen we als relatie *F* de relatie van een ding *u* tot zijn oorsprong en ontstaansgrond *v*, dan is het bijbehoorende absolutum *f* het „beginsel" in den zin van de physiologen, t.w. datgene, dat oorsprong en ontstaansgrond van alle andere dingen is, maar zelf geen oorsprong of ontstaansgrond buiten zich bezit[3]).

Nemen we als relatie *F* de relatie van een ding *u* tot een ding *v*, waardoor het wordt bewogen, dan is het bijbehoorende absolutum *f* de „eerste beweger" in den zin van Aristoteles[4]).

Nemen we als relatie *F* de relatie van een stelling *u* tot een stelling *v*, waarop ze is gegrond, dan is het bijbehoorende absolutum *f* een grondstelling in den zin van de wetenschapsleer van Aristoteles[5]). Zulk een grondstelling is uiteraard voor geen

---

[1]) L. Rougier, „Les paralogismes du rationalisme", Paris 1920; B. Schultzer, „Transcendence and the logical difficulties of transcendence", Copenhagen—London 1935.

[2]) Aristoteles, „Metaphysica", α 2.

[3]) Aristoteles, „Metaphysica", Α 3.

[4]) Aristoteles, „Metaphysica", Λ 7.

[5]) J. Dewey, „Essays in experimental logic", Chicago, Ill., 1916, p. 203; H. Scholz, „Die Axiomatik der Alten", Bl. f. deutsche Philos. 4, 1930; E. W. Beth, „De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano", Antwerpen 1944, hoofdstuk III.

bewijs vatbaar en moet dus op grond van haar innerlijke evidentie worden aanvaard.

Nemen we als relatie *F* de relatie van een ruimtelijke omgeving *u* tot een ruimtelijke omgeving *v*, ten opzichte waarvan ze in een bepaalden bewegingstoestand verkeert, dan is het bijbehoorende absolutum *f* de absolute ruimte in den zin van Newton, ten opzichte waarvan elke ruimtelijke omgeving in een bepaalden bewegingstoestand verkeert, maar die zelf niet in een bepaalden bewegingstoestand verkeert ten aanzien van een andere ruimtelijke omgeving.

Nemen we als relatie *F* de relatie van een imperatief *u* tot een imperatief *v*, waarop ze is gegrond, dan is het bijbehoorende absolutum *f* de kategorische imperatief in den zin van Kant[1]), die, zonder op een anderen imperatief gegrond te zijn, den grondslag uitmaakt van alle andere — hypothetische — imperatieven.

Als voorbeeld zou ik verder kunnen noemen de idee, het anhypotheton en het volstrekt groote en kleine in den zin van Plato, het hoogste goed, de substantie en het minimum naturale in den zin van Aristoteles, de transcendentalia in den zin der scholastieke traditie, de substantie in den zin van Spinoza, het transcendentale subject in den zin van Kant en de waardesubstantie in den zin van Marx.

De metaphysica is nu de leer der absoluta in den zin van het in het in het bovenstaande geformuleerde postulaat, dat ik in het volgende als *postulaat van* Aristoteles wil aanduiden. Aristoteles duidt de absoluta in den regel als *beginselen (ἀρχαί)* aan.

Op de classificatie van de metaphysische stelsels, die door de resultaten der zoojuist geschetste logische analyse mogelijk wordt gemaakt, kan ik hier niet ingaan. Ik vermeld slechts, dat de chronologische scheidingslijnen van geringe beteekenis blijken te zijn. Zoo is de metaphysica, die we aantreffen in de eerste boeken van Spinoza's „Ethica", ten nauwste verwant met de leer der eleaten.

De toepassing van het postulaat van Aristoteles is wat de Stagiriet als *inductie (ἐπαγωγή)* aanduidt; tot deze verrichting stelt de *intuïtie (νοῦς)* den mensch in staat krachtens een natuurlijke gemeenschap van den menschelijken geest met het goddelijk wereldbeginsel[2]). Tegenover deze opvatting van den Stagiriet heeft men

---

[1]) I. Kant, „Grundlegung zur Metaphysik der Sitten", 2. Abschnitt.

[2]) W. Windelband — A. Goedeckemeyer, „Geschichte der abendländischen Philosophie im Altertum", 4. Aufl. München 1923, Ss. 180, 195.

naderhand andere zienswijzen geplaatst. Ook de traditioneele kennistheorie vindt dus in ons fundamenteele postulaat haar grondslag.

Ik meen thans de door mij gegeven omschrijving van den term „metaphysica" voldoende te hebben toegelicht en wil nu trachten, deze omschrijving te rechtvaardigen; daartoe zal ik laten zien, dat bij aanvaarding van het postulaat van Aristoteles de voor de metaphysica kenmerkende begrippen, beweringen, problemen en redeneeringen inderdaad tevoorschijn komen.

Beschouwen wij een eigenschap A. Als relatie F nemen wij de relatie, die een ding u dan en dan alleen tot een ding v heeft, als het A-zijn van v een noodzakelijke voorwaarde is voor het A-zijn van u. Voor het bijbehoorende absolutum f geldt nu, dat het A-zijn van f een noodzakelijke voorwaarde is voor het A-zijn van onverschillig welk ander ding x. Het ligt voor de hand, het absolutum f te vereenzelvigen met de aan de eigenschap A beantwoordende idee in den zin van Plato.

Ten aanzien van het absolutum f dringen zich nu aanstonds die vragen op, die met elkaar het klassieke *probleem der universalia* vormen. Immers, zij A een eigenschap, die van veranderlijke en vergankelijke dingen kan worden gepraediceerd. Nu kan het absolutum f geen veranderlijk of vergankelijk ding zijn. Immers, zou f vergaan of zelfs maar de eigenschap A verliezen, dan zou daardoor tegelijk elk ander ding de eigenschap A verliezen.

Het ligt dus voor de hand, te onderstellen, dat het absolutum f één onveranderlijk en onvergankelijk ding is, dat naast en afgescheiden van de andere dingen met de eigenschap A bestaat. Deze leer der separatie leidt echter tot vreemde gevolgtrekkingen. Beschouwen wij de eigenschap A', die aan een ding dan en slechts dan toekomt, als het de eigenschap A bezit, maar niet identiek is met f. Zooals bij de eigenschap A een absolutum of idee f behoort, zoo behoort bij de eigenschap A' een absolutum of idee f'; men toont gemakkelijk aan, dat f' niet identiek is met f. Wij kunnen nu de eigenschap A'' beschouwen, die aan een ding dan en slechts dan toekomt, als het de eigenschap A bezit, maar niet identiek is met f of f'; bij deze eigenschap A'' behoort een absolutum f'', dat noch met f, noch met f' identiek is. Enzoovoort. Aan een eigenschap A beantwoordt dus niet slechts één absolutum f, maar een reeks absoluta $f, f', f'' \ldots$

Op de theorieën, die Aristoteles e.a. hebben opgesteld, om aan dit zg. argument van den derden mensch [1]) te ontkomen, behoef

[1]) Plato, „Parmenides" 132 A, Aristoteles, „Metaphysica", Z 6.

ik hier niet in te gaan. Ik meen te hebben waar gemaakt, dat het postulaat van Aristoteles als uitgangspunt van de traditioneele metaphysica kan worden beschouwd, wat tevens een rechtvaardiging inhoudt van de door mij gegeven omschrijving van den term „metaphysica".

Het bestaansrecht van de metaphysica zal blijkbaar staan of vallen met het postulaat van Aristoteles. Wat hebben we van dit postulaat te denken?

Bedienen we ons van de terminologie van de moderne logica, dan kunnen we zeggen: het postulaat van Aristoteles is geen logische identiteit, maar het is ook niet weerlegbaar. Met andere woorden: met betrekking tot sommige relaties geldt het postulaat, met betrekking tot andere geldt het niet; aan de eerstbedoelde relaties beantwoordt een absolutum, aan de overige beantwoordt er geen.

Dit brengt natuurlijk mee, dat aan een beroep op het postulaat geen bewijskracht kan worden toegekend. Dit is reeds ingezien door Kant[1]), die het postulaat karakteriseert als „Grundsatz der Vernunft.... zu dem bedingten Erkenntnisse des Verstandes das Unbedingte zu finden, womit die Einheit desselben vollendet wird", die er slechts heuristische waarde aan toekent, en de erop gegronde godsbewijzen verwerpt, hoewel hij er zich elders toch weer op beroept, zooals we reeds hebben vastgesteld.

Wij kunnen niet anders doen, dan van geval tot geval vaststellen, of aan de beschouwde relaties een absolutum beantwoordt. Daarmee ontvalt echter aan de metaphysica haar traditioneele grondslag.

Beschouwen we de zaak meer in concreto, dan vinden we, dat in steeds meer gevallen het postulaat van Aristoteles niet van toepassing is gebleken.

De Stagiriet zelf kent merkwaardigerwijs reeds zulk een geval. In het postulaat ligt nl. opgesloten, dat er een van nul verschillende grootheid is, die door elke andere grootheid wordt overtroffen, en evenzeer een grootheid, die elke andere grootheid overtreft. Zich aansluitend bij Eudoxus stelt echter Aristoteles tegenover de aanvaarding van dergelijke „oneindig kleine" en „oneindig groote" grootheden — waarop reeds Plato [2]) zinspeelt — zijn leer van het potentiëel oneindige [3]).

De wetenschapsleer van Aristoteles, die uitgaat van de

---

[1]) I. Kant, „Kritik der reinen Vernunft", A 307/8, 669, 671.

[2]) Plato, „De Staat", 524 C.

[3]) E. W. Beth, „De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano", blzz. 170—172.

opvatting, dat de grondstellingen der wetenschap om haar innerlijke evidentie moeten worden aanvaard en dus voor geen correctie vatbaar zijn, is in onzen tijd niet langer houdbaar[1]).

Newton's beroep op een absolute ruimte is reeds spoedig bestreden en in onzen tijd door de relativiteitstheorie overbodig geworden. Marx' „Wertsubstanz" en zijn objectieve waardeleer hebben in later tijd plaats moeten maken voor een subjectieve waardeleer, die zich uitsluitend op relatieve waardeeringen beroept.

Daarentegen moet worden opgemerkt, dat Plato's ideeënleer op een houdbaren grondslag berust en dat minstens één der door Thomas van Aquino vermelde godsbewijzen in een ook nu nog aanvaardbaren vorm kan worden gebracht[2]).

Dat de traditioneele metaphysica in wetenschappelijke kringen haar gezag langzamerhand volkomen heeft ingeboet, is intusschen volkomen verklaarbaar en het is, zuiver zakelijk gezien, ook niet anders dan gerechtvaardigd te achten.

Het kan echter niet worden ontkend, dat nog altijd velen aan de metaphysica belangrijke inzichten meenen te kunnen ontleenen; men plaatst zelfs niet zelden naast de moderne wetenschappelijke theorieën zg. wijsgeerige wetenschappen — wijsgeerige logica, wijsgeerige ruimteleer, natuurphilosophie, wijsgeerige psychologie, enz. —, welker waarde uitsluitend hierin is gelegen, dat zij niet, als de moderne wetenschappelijke theorieën, in conflict komen met het postulaat van Aristoteles. Vanwaar deze merkwaardige verknochtheid aan opvattingen, die met vaststaande resultaten van hedendaagsch onderzoek niet zijn overeen te brengen?

Om dit verschijnsel te kunnen verklaren, moeten we doordringen in den religieuzen voedingsbodem van de metaphysische bespiegeling. Ik doel hier niet op den band, die op den duur is ontstaan tusschen de metaphysica en de theologische dogmatiek, maar op de religieuze — zoo men wil: de existentiëele — strekking, die aan de metaphysica van den aanvang af is eigen geweest.

De metaphysica pretendeert, den mensch een inwijding te verschaffen, die het intellectueele analogon is van die, welke de antieke mysteriën hem boden. Zij wil de verwondering van den mensch over zijn levenslot wegnemen door hem een definitieve, voor geen correctie of aanvulling vatbare, verklaring van zijn levensondervindingen te schenken. Zulk een verklaring is gelegen in de kennis van het absolute; de metaphysica is als leer van het absolute de hoogste wetenschap. De mensch wordt door zijn kennis van het

---

1) Verg. noot 5, blz. 7.

2) E. W. Beth, „De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano", blzz. 51—54.

absolute ingewijd in de mysteriën des levens, hij verwerft dientengevolge de intellectueele onsterfelijkheid, d.w.z. hij wordt onvatbaar voor de verwondering, die als een intellectueel sterven wordt opgevat. Daarom moet hij ook, zooals Plato en Aristoteles opmerken, door de verwondering zijn aangegrepen, vóór hij rijp wordt voor het metaphysisch inzicht; ook in de mysteriën onderging men den dood, om daaruit tot eeuwig leven te worden wedergeboren. De metaphysicus is dus een ingewijde in het levensmysterie; hij bezit de oplossing van het levensraadsel.

Deze merkwaardige opvatting, die het verwerven van een bevoorrechten existentiëelen status vastkoppelt aan het zich eigen maken van fundamenteel inzicht van theoretischen aard, heeft in de oudheid een buitengewoon groote verbreiding gehad. Zoo vinden we een naklank ervan in de germaansche heldensage [1]). De held, die zich in het drakenbloed baadt, wordt daardoor niet slechts onkwetsbaar en dus onsterfelijk, hij leert ook de taal der vogels verstaan, d.w.z., hij wordt ingewijd in de geheimen der natuur.

In den nieuweren tijd is men echter hoe langer hoe meer tot de overtuiging gekomen, dat wetenschappelijk onderzoek nimmer definitieve kennis kan opleveren, zooals de metaphysica voorgeeft te kunnen verschaffen. Het wetenschappelijk onderzoek is steeds voor verdere uitbreiding en zijn resultaten zijn dus steeds voor herziening vatbaar. Dit inzicht is vernietigend voor het wetenschappelijk crediet der metaphysica.

Men kan dan ook bij een bepaalde metaphysische overtuiging slechts dan volharden, als men zijn gezichtskring tot een bepaald gebied van menschelijke ondervinding beperkt. Dit komt ondubbelzinnig tot uitdrukking in het bekende woord van Bergson [2]), dat de echte philosooph slechts één ding pleegt te zeggen. Zonder te willen betwisten, dat zulk een moedwillige beperking van den levenskring op ernstige overwegingen kan steunen, wil ik toch opmerken, dat zij in andere gevallen veeleer geestelijke bekrompenheid verraadt. Aan het wetenschappelijk gehalte van de wijsbegeerte kan zij nimmer ten goede komen en ik kan er dan ook geen wijsgeerige deugd in zien.

Het kan intusschen niet worden betwist, dat het wegvallen van de metaphysica op den globus intellectualis een vacuum doet ontstaan, dat moet worden aangevuld. Het uitgangspunt der metaphysica bleek onhoudbaar, haar aanspraken bleken de kritiek van

---

[1]) O. L. Jiriczek, „Die deutsche Heldensage", Samml. Göschen Nr. 32, Berlin—Leipzig [4]1922, S. 59, S. 71.

[2]) H. Bergson, „La pensée et le mouvant", p. 141.

het wetenschappelijk denken niet te kunnen doorstaan. Dit mag ons echter niet doen voorbijzien, dat bij de metaphysische discussie allerlei problemen aan de orde plegen te komen, die zonder ernstige schade voor wetenschap en leven niet kunnen worden verwaarloosd.

Daar zijn ten eerste de vragen, die de grondslagen der wetenschappen betreffen. Werd voorheen voor de beantwoording van deze vragen naar de metaphysica verwezen [1]), in onzen tijd worden ook zij met behulp van vakwetenschappelijke methoden behandeld. Op deze vragen, hoe interessant zij ook zijn en hoe vruchtdragend voor de wetenschap haar discussie ook is gebleken, wil ik echter bij deze gelegenheid niet ingaan.

Naast het grondslagenonderzoek ligt echter nog, wat reeds Kant [2]) als het wereldbegrip der wijsbegeerte tegenover haar schoolbegrip stelt, het gebied van de zg. levensvragen. Een dezer vragen moge ik hier stellen, zonder dat ik mij in een poging tot beantwoording begeef, en wel de vraag, hoe ons weten van het bestaan van een algemeene natuurwetmatigheid te rijmen is met onze overtuiging met betrekking tot de zedelijke wereldorde en de bestemming van den mensch. Het is noodzakelijk, dit weten en die overtuiging tot harmonie te brengen, omdat ze beide richting geven aan onze gedragingen.

De wetenschappelijke behandeling van dergelijke levensvragen valt toe aan een tak van wetenschap, die met eenig recht als *levensphilosophie* kan worden aangeduid. Deze levensphilosophie is geen zuivere, maar toegepaste wetenschap; zij is geen belangeloos zoeken naar waarheid, doch wil voorzien in een menschelijke levensbehoefte.

Zulk een levensphilosophie zal echter, wil zij geen gevaar loopen, het wetenschappelijk spoor aanstonds bijster te raken, niet voetstoots tot de *beantwoording* van de haar voorgelegde levensvragen mogen overgaan. Zij zal moeten beginnen met een nauwgezette en kritische *toetsing* van deze vragen zelf, zooals met name door de neo-positivisten en de significi op goede gronden is betoogd. Vele van deze vragen blijken nl. schijnvragen te zijn en wel, in de terminologie van Mannoury [3]), hetzij eigenlijke, hetzij oneigenlijke schijnvragen. De eigenlijke schijnvragen verdwijnen bij een passende verscherping van de terminologie, de oneigenlijke kunnen

---

[1]) Verg. F. L. R. Sassen, l.c. blz. 8.

[2]) I. Kant, „Logik", Einleitung III.

[3]) G. Mannoury, „De signifiese metode", in: „De uitdrukkingswijze der wetenschap", Groningen 1931.

alleen door een wilsbeslissing worden beslecht. De problemen, die na het uitschiften van de beide soorten schijnvragen overblijven, kunnen door wetenschappelijk onderzoek nader tot een beantwoording worden gebracht; dat dergelijk onderzoek nimmer een resultaat kan opleveren, dat voor geenerlei correctie vatbaar is, behoef ik niet opnieuw te betoogen.

In veel gevallen zal intusschen bij den huidigen stand van de wetenschap een goed gefundeerde beantwoording mogelijk zijn. In andere gevallen zal een beantwoording mogelijk zijn door middel van een min of meer vermetele extrapolatie van reeds voorhanden wetenschappelijke inzichten; juist in deze gevallen zal de levensphilosophie een stimuleerenden invloed kunnen uitoefenen op het zuiver wetenschappelijk onderzoek, mits zij zich van de traditioneele schemata weet vrij te houden.

In sommige gevallen ontbreekt echter zelfs voor de meest vermetele extrapolatie elke grondslag; in deze gevallen is het een eisch van wetenschappelijkheid, dat wij ons oordeel opschorten. Men zie hierin niet een erkenning van het onvermogen der wetenschap ten aanzien van de beantwoording der levensvragen, waardoor opnieuw een arbeidsveld zou worden geopend voor een speculatieve metaphysica. Het ongelijk ligt in dezen niet bij hen, die de metaphysische speculatie als wetenschappelijk niet verantwoord verwerpen, maar bij hen, die de inwijding in het levensmysterie van de theoretische bezinning alleen verwachten. Zulk een inwijding kan slechts geschieden door het leven zelf, waarvan de theoretische bezinning slechts een bijzonder aspect is. Wij kunnen, naar het mij voorkomt, deze slotsom van het moderne irrationalisme aanvaarden, zonder aan het bestaansrecht der theoretische bezinning in eenig opzicht tekort te doen.

De ondergang van de oude metaphysica en de opkomst van grondslagenonderzoek en levensphilosophie luiden m.i. een nieuwe Verlichting in, aanmerkelijk radicaler dan de Verlichting van twee eeuwen geleden, die over het geheel kniediep in de traditioneele metaphysica bleef steken.

Het groote succes van de Verlichting der 18de eeuw houdt ten nauwste verband met de gelijktijdige expansie van de westersche beschaving, naar binnen door het opkomen van de burgerij en naar buiten door het ontwaken van de staten in Oost-Europa en Noord-Amerika. Ik bedoel natuurlijk niet, dat deze verschijnselen de Verlichting zouden hebben veroorzaakt; verlichte kritiek op de heerschende opvattingen is van alle tijden.

De burgerij van West-Europa, de bewoners van Oost-Europa en

Noord-Amerika wenschten zich de westersche beschaving eigen te maken; deze beschaving, zooals ze historisch was gegroeid, bevatte evenwel vele traditioneele bestanddeelen, die voor den breeden kring der novieten onverteerbaar moesten zijn. Juist deze bestanddeelen echter waren door denkers als Locke, Wolf en Voltaire als verouderd aangewezen. Door deze kritiek werd de westersche beschaving ontdaan van haar verouderde bestanddeelen, waardoor datgene, wat van universeele beteekenis was, beter tot zijn recht kwam en door de opkomende klassen en volken zonder groote moeilijkheden kon worden geassimileerd. Zoo verkreeg de Verlichting voor haar denkbeelden een afzetgebied, dat haar in staat stelde, zich ten volle te ontplooien. Merken wij in het voorbijgaan even op, dat de verspreiding van de stoïcijnsche wijsbegeerte in de antieke wereld aan soortgelijke omstandigheden is toe te schrijven.

In de decennia, die vóór ons liggen, hebben wij een dergelijke ontwikkeling op nog veel grooter schaal te verwachten. Wij mogen niet de illusie koesteren, dat de ontwakende volkeren van het Oosten, die zich de westersche levenswijze willen eigen maken, zich daarbij veel zullen aantrekken van onze traditioneele preferenties of onze gevoelens van piëteit. Integendeel, zij zullen uit ons geestelijk erfdeel slechts datgene willen overnemen, wat kansen biedt op snel en tastbaar voordeel, in de eerste plaats dus onze stoffelijke en medische techniek, daarnaast wellicht onze maatschappelijke organisatie; reeds op economische gronden zullen zij tot zulk een selectie zijn gedwongen. De gevaren, die zulk een slechts partiëele assimilatie van de westersche beschaving meebrengt, zijn ons echter door Japan met alle gewenschte duidelijkheid voor oogen gesteld.

De eenige mogelijkheid, den bij den Oosterling bestaanden innerlijken weerzin tegen het overnemen óók van onze geestelijke goederen te overwinnen en de door hem ondervonden practische bezwaren te ondervangen, is m.i. gelegen in een kritische beschouwing van onze beschavingsgoederen en een bezinning op hun grondslagen door ons, westerlingen, zelf.

Zulk een kritische beschouwing en een daarbij aansluitende zuivering van onze beschaving zou tegelijk die versobering meebrengen, die Huizinga [1]), waarschijnlijk terecht, als noodzakelijk voor haar genezing beschouwt. Het zal wel zeer moeilijk blijken, de huidige dragers van de westersche beschaving ertoe te

---

[1]) J. Huizinga, „Geschonden wereld". 2de druk, Haarlem 1945, blzz. 160 vv.

brengen, afstand te doen van veel, dat zinloos en smakeloos, overtollig en zelfs schadelijk moet heeten; maar het is misschien niet onmogelijk, de oostersche wereld de westersche beschaving in een gezuiverden vorm te brengen.

In dezen arbeid valt ons, Nederlanders, uiteraard een belangrijk aandeel toe. Ons land is een van de beproefde bolwerken der westersche beschaving en bovendien aansprakelijk voor de ontwikkeling van uitgestrekte overzeesche gebieden; het ontbreken van een sterk ontwikkeld rasvooroordeel mag ons bij de oostersche volken, ook buiten de rechtstreeks met ons verbonden gewesten, een welwillend gehoor doen verwachten.

Voor de vervulling van deze ons door de geschiedenis opgelegde taak zullen wij noodig hebben: bereidheid met anderen in innige gedachtenwisseling te treden, een gepast gevoel van eigenwaarde, steunend op het besef van het bezit van een rijke beschaving en van een ongebroken geestkracht, en, bovenal, innerlijke en uiterlijke, geestelijke, maatschappelijke en staatkundige vrijheid.

DE LEER DER GETALLEN

door

Dr. C. VISSER [1]).

Het zij mij vergund U in dit uur een en ander mede te delen over de leer der getallen.

Bertrand Russell heeft eens de wiskunde gekarakteriseerd als de wetenschap, waarvan de beoefenaren niet weten, waarover zij spreken, terwijl het hen ook niet interesseert of wat zij uitspreken werkelijk waar is. Deze woorden, die een oningewijde waarschijnlijk vreemd in de oren zullen klinken, bevatten meer waarheid dan men wellicht geneigd is te denken en zij zullen dan ook door geen wiskundige lichtvaardig worden tegengesproken.

Dat neemt echter niet weg, dat vrijwel iedere wiskundige de behoefte heeft het werken met zijn symbolen en formules te rechtvaardigen en te verklaren door er de een of andere voorstelling aan te verbinden. In het bijzonder geldt dit voor de principiële elementen, die het uitgangspunt van zijn verdere beschouwingen moeten vormen. Tot die principiële elementen behoren in de eerste plaats de getallen en het is mijn bedoeling, bij wat ik ga zeggen, in het bijzonder de nadruk te leggen op de aanschouwelijke voorstellingen, waaruit de fundamentele begrippen van de leer der getallen ontstaan kunnen worden gedacht en over de manier, waarop dit kan geschieden.

Ik begin met de natuurlijke getallen. Men heeft het begrip natuurlijk getal op grondige wijze geanalyseerd en er vele verhandelingen over geschreven. De wiskundigen onder U zullen hierbij denken aan de namen *Frege* en *Dedekind*. Volgens *Dedekind* ligt de oorsprong van het getalbegrip in het vermogen van onze geest dingen te laten corresponderen met andere dingen, aan een ding een ander ding toe te voegen, of een ding door een ander ding af te beelden. Zonder dat, zegt hij, zou helemaal geen denken mogelijk zijn.

Wij zullen ons in beschouwingen van deze aard niet verder verdiepen, maar ons om te beginnen op het standpunt stellen, dat het woord aantal of cardinaalgetal een duidelijke betekenis heeft en dat we daarbij denken aan een zekere hoeveelheid van dingen, een eindige verzameling om een wiskundige term te gebruiken, en tegelijk

---

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de theoretische mechanica aan de Technische Hogeschool te Delft op 3 Oct. 1946.

abstraheren van de bijzondere aard van die dingen. Ook weten we wat optellen en vermenigvuldigen is; we moeten daarbij niet aan rekensommetjes denken, maar aan het bijeenvoegen van hoeveelheden. De som van twee aantallen is het aantal, dat we krijgen door die twee aantallen tot een te verenigen. Het product van twee aantallen is het aantal, dat ontstaat door ieder element van een van die twee aantallen te vervangen door een aantal, dat even groot is als het andere.

Men behoeft zich, ook al heeft men nooit enig rekenonderwijs genoten, en misschien juist dan, niet lang met aantallen bezig te houden, om te constateren, dat zij allerlei en vaak moeilijk te doorgronden eigenschappen hebben. Als eenvoudig voorbeeld noem ik de volgende. Men zegt, dat een aantal een ander aantal als deler heeft, wanneer het verdeeld kan worden in een aantal aantallen, die alle even groot zijn als dat andere aantal. Neem nu twee aantallen, die we gemakshalve even *a* en *b* zullen noemen. We vragen naar de aantallen, die deler zijn zowel van *a* als *b*, dus naar de gemeenschappelijke delers van *a* en *b*. Is het nu niet een verrassend feit, dat deze gemeenschappelijke delers juist alle delers zijn van één derde aantal *c*?

Dit is natuurlijk slechts een zeer eenvoudige kwestie. De meeste problemen op dit gebied liggen veel dieper. Opvallend is vaak het contrast tussen de eenvoud van de probleemstelling en de moeilijkheden, die de oplossing met zich meebrengt. Natuurlijk prikkelt dat juist de onderzoekers ten zeerste. Zij, die zich met het opsporen en doorgronden van de eigenschappen der getallen bezighouden, hebben dan ook bij alle verscheidenheid een trek gemeen. Zij worden door hun onderzoekingen zo bekoord, dat zij van geen ophouden meer weten, zoals de grootste onder hen, de beroemde *Gausz,* heeft gezegd.

In vroeger tijden ging de studie der aantallen dikwijls gepaard met het verkondigen van allerlei merkwaardigheden, die ons heden zonderling aandoen. Deze hebben veelal betrekking op bepaalde individuele eigenschappen der getallen. Zo heeft men een bijzondere belangstelling gehad voor de zogenaamde volmaakte getallen. Onder een volmaakt getal verstaat men een getal, dat gelijk is aan de som van zijn delers; daarbij zijn alleen delers kleiner dan het getal zelf, 1 inbegrepen, bedoeld. Het getal 28 is een voorbeeld van een volmaakt getal; zijn delers zijn 1, 2, 4, 7 en 14 en de som van deze is weer 28. Het kleinste volmaakte getal is 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Een onvolmaakt getal is een getal, dat groter is dan de som van zijn delers; 8 is een voorbeeld van een onvolmaakt getal. Met deze volmaaktheid en onvolmaaktheid van getallen bracht men allerlei dingen in verband. De kerkvader *Augustinus* verkondigde, dat God daarom de wereld in 6 dagen had geschapen en niet ineens, opdat de volmaaktheid van de schepping door het getal 6, het kleinste volmaakte getal, zou worden uitgedrukt. Dezelfde uitspraak deed *Alcuin* van York en Tours. Deze merkte ook op, dat de ark van Noach 8 levende menselijke zielen bevatte en dat daarom het menselijke geslacht, dat begint met Noach, noodzakelijk onvolmaakt is.



Nov. 1946

Prof. Dr C. VISSER,

geb. 8 April 1910 te Sliedrecht, leraar aan de Gemeentelijke Hogere Burgerschool te Dordrecht 1936—1946, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft in 1946.

Na deze proeve van toegepaste wiskunde moge vermeld worden, dat het begrip volmaakt getal ook aanleiding geeft tot bespiegelingen van zuiver wiskundige aard. Men kent enige even volmaakte getallen; men heeft zelfs een soort formule ervoor, die reeds door *Euclides* werd opgesteld. Men weet echter niet of deze er eindig of oneindig veel voorstelt. Oneven volmaakte getallen kent men helemaal niet en het is niet bekend of er een bestaat.

Zulke onopgeloste kwesties zijn er vele in de getallentheorie en zij behoren tot de moeilijkste problemen, die de wiskunde kent. Ik noem als voorbeeld het beroemde probleem van *Goldbach*. Er is nog nooit een even getal ontdekt, dat niet de som is van twee ondeelbare getallen. Het lijkt wel, dat zo'n splitsing altijd mogelijk is: $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11$ en ook $= 7 + 7$, $16 = 5 + 11$ en ook $= 3 + 13$, enz. Toch is dit vermoeden nooit bewezen. De Russische wiskundige *Winogradof* heeft echter in deze richting een indrukwekkend resultaat bereikt. In 1939 bewees hij, dat elk oneven getal de som is van niet meer dan drie ondeelbare getallen.

Van andere merkwaardige eigenschappen, die betrekking hebben op het splitsen van getallen, is de volgende een eenvoudig voorbeeld. Beschouw de ondeelbare getallen van de vorm 4-voud + 1, dus de getallen 5, 13, 17, 29, enz. Deze getallen zijn altijd en wel slechts op één manier te splitsen in twee vierkanten: $5 = 1 + 4$, $13 = 4 + 9$, $17 = 1 + 16$, $29 = 4 + 25$, enz. Dit heeft enige eeuwen geleden *Euler* al bewezen.

Nu we toch over ondeelbare getallen spreken, nog een enkel woord daarover. Ondeelbaar noemen we een getal, als het behalve de eenheid en zich zelf geen delers heeft. Het getal 1 rekenen we niet tot de ondeelbare getallen, en de rij der ondeelbare getallen begint dus met 2, 3, 5, 7, 11, 13, enz. De eerste vraag, die hier rijst, is: komt er aan deze rij ooit een einde?; anders gezegd: zijn er eindig of oneindig veel ondeelbare getallen? Het antwoord is, dat er oneindig veel zijn; het hiervoor door *Euclides* gegeven bewijs vindt men heden nog in alle leerboeken. Het berust op het feit, dat ieder getal het product is van ondeelbare factoren. Dit plus de bewering, dat deze ontbinding slechts op één manier mogelijk is, noemt men wel de hoofdstelling van de theorie der natuurlijke getallen. Leken op wiskundig gebied zijn wel geneigd dit te houden voor iets, dat vanzelf spreekt. Dat is echter volstrekt niet het geval.

Een tweede vraag over de ondeelbare getallen is: hoeveel ondeelbare getallen zijn er beneden 100, hoeveel beneden 1000, enz.? Hierover hebben reeds *Legendre* en *Gausz* een vermoeden uitgesproken, maar het heeft tot 1900 geduurd, eer door *Hadamard* en *De la Vallée—Poussin* een bewijs voor dit vermoeden werd gevonden. De stelling van *Hadamard* en *De la Vallée—Poussin* zegt het volgende. Van de getallen beneden een getal x is ongeveer het $(\log x)^{\text{de}}$ deel ondeelbaar en hoe groter x is, hoe scherper dit antwoord. Log x betekent hierbij de

natuurlijke logarithme van x. In meer exacte vorm: is $\pi(x)$ het aantal ondeelbare getallen beneden x, dan heeft de verhouding tussen $\pi(x)$ en $x/\log x$, wanneer x onbepaald toeneemt, de limiet 1. Bij het bewijs van deze stelling treedt de beroemde Zêta-functie van *Riemann* op, een transcendente functie van een complexe veranderlijke, waarvan de eigenschappen nauw samenhangen met die der natuurlijke getallen.

Er zijn natuurlijk vele andere vragen over de ondeelbare getallen te stellen. Ik vermeld er nog een. Het is zeer opvallend, dat er zo vaak zogenaamde tweelingen in de rij der ondeelbare getallen voorkomen. Daarmee bedoelt men paren als 17 en 19, of 29 en 31, dus paren van twee opvolgende oneven getallen, die beide ondeelbaar zijn. Het is niet bekend of er oneindig veel van zulke tweelingen zijn. Wel weet men, dat de som van hun omgekeerden convergeert, terwijl de som van de omgekeerden van alle ondeelbare getallen divergeert. Dat wijst dus op een niet al te veelvuldig voorkomen van tweelingen.

Tot dusver heb ik niet gesproken over de notatie van de getallen met behulp van cijfers en ik zal ook verder hierover zwijgen. De grondbegrippen van de getallentheorie zijn daarvan onafhankelijk. We hebben de theorie der natuurlijke getallen opgevat als de theorie van de eindige verzamelingen; men kan zich voorstellen, dat men spreekt over hoopjes knikkers of pepernoten; men moet weten, wat voor samenvoegingen bedoeld worden met optellen en vermenigvuldigen; een of andere algorithmus heeft daarmee niets te maken; rekentechniek is voor het inzicht in het getalbegrip van geen belang. Heb ik in het vorige enkele getallen, zoals 28, genoemd, dan was dit slechts ter bekorting; ik had ook 28 stippen kunnen tekenen of 28 keer mijn vinger op kunnen steken.

Overigens vormt de ontwikkeling van de methoden om getallen door woorden of tekens op ondubbelzinnige manier aan te geven en in het bijzonder de ontwikkeling van het positiesysteem, dat wij dagelijks gebruiken, een stuk cultuurgeschiedenis van grote betekenis. Het ligt echter buiten mijn bestek daar nader op in te gaan.

Behalve als aantallen of cardinaalgetallen kan men de natuurlijke getallen ook opvatten als ordinaalgetallen. Men denkt dan meer aan het telproces. Met het oog op een later te vermelden generalisatie, wil ik een ordinaalgetal definiëren als een abstracte geordende verzameling. Het begrip geordende verzameling wordt bijvoorbeeld gegeven door een aantal op een rij geplaatste stippen of door een reeks opvolgende gebeurtenissen of tijdstippen. Op voor de hand liggende wijze definieert men voor ordinaalgetallen optelling en vermenigvuldiging. De theorie, die zo ontstaat, is formeel geheel dezelfde als die der cardinaalgetallen.

Als ideale vorm van een deductieve wetenschap wordt door velen beschouwd de axiomatische theorie, waarvan de meetkunde van *Euclides* ons het klassieke voorbeeld geeft. Het is vooral *Hilbert,* die de waarde van de axiomatische methode naar voren heeft gebracht.

Hij beschouwt de axiomatische opbouw van elke wetenschap als het uiteindelijke doel van die wetenschap en als de enige methode, die absolute zekerheid geeft. Zelf heeft hij een diepgaand onderzoek betreffende de axiomatische opbouw van de euclidische meetkunde verricht en daarmee het werk van Euclides voortgezet en voltooid.

In eën axiomatische theorie wordt elk begrip nauwkeurig gedefinieerd met behulp van reeds vastgelegde begrippen en elke stelling streng bewezen op grond van daarvoor bewezen stellingen. Daar men echter niet met niets kan beginnen, worden enige grondbegrippen zonder definitie en enige grondstellingen of axioma's zonder bewijs als uitgangspunt genomen. Vroeger rechtvaardigde men de invoering van bepaalde grondbegrippen en grondstellingen met een beroep op hun volkomen duidelijkheid en evidentie op grond van aanschouwing of ervaring. Tegenwoordig vat men de zaak anders op. Grondbegrippen en grondstellingen van een axiomatische theorie zijn geheel willekeurig. De theorie wordt opgevat als een abstract systeem, onafhankelijk van aanschouwing of ervaring. Zij wordt daardoor, zoals men het wel uitdrukt, tot een spel met formules, dat volgens zekere regels wordt gespeeld. Men eist slechts, dat deze regels en de uitgangspunten zo zijn, dat het uitgesloten is, dat er ooit een contradictie ontstaat.

Door *Peano* is de leer der natuurlijke getallen in een dergelijke axiomatische vorm gebracht. Grondbegrippen zijn „1", „natuurlijk getal" en „opvolger van". De axioma's, vijf in getal, zijn:

I. 1 is eèn natuurlijk getal.

II. Is a een natuurlijk getal, dan is ook de opvolger van a een natuurlijk getal.

III. Hebben twee natuurlijke getallen dezelfde opvolger, dan zijn zij identiek.

IV. Is a een natuurlijk getal, dan is de opvolger van a niet 1.

V. Het axioma der volledige inductie. Heeft 1 een zekere eigenschap E en heeft, als het natuurlijke getal a de eigenschap E heeft, ook zijn opvolger de eigenschap E, dan hebben alle natuurlijke getallen de eigenschap E.

Uitgaande van deze beginselen kan men definities opstellen voor de som en het product van twee natuurlijke getallen en de gehele theorie opbouwen. De kwestie van de contradictieloosheid schijnt nog een teer punt te zijn. Om deze te kunnen bewijzen is het nodig, dat men vooraf een overzicht heeft van de definitievormen, volgens welke men nieuwe begrippen kan invoeren, en van de redeneervormen, volgens welke men conclusies kan trekken. We komen hiermede op het gebied van de bewijstheorie, waarop in de laatste tijd zeer belangwekkende onderzoekingen zijn verricht.

Na deze beschouwingen over de natuurlijke getallen, vraag ik Uw aandacht voor de positieve en negatieve getallen en het getal nul. In de meeste moderne leerboeken worden deze op een formele manier inge-

voerd als paren natuurlijke getallen, waarvoor zekere rekenregels worden vastgesteld. Van logisch standpunt is daar niets tegen in te brengen; wanneer men echter prijs stelt op een natuurlijke en geleidelijke ontwikkeling van nieuwe begrippen uit reeds aanwezige voorstellingen en eenvoudige aanschouwingselementen, dan kan men te werk gaan op de manier, die ik nu uiteen zal zetten.

We stellen ons voor een naar twee kanten eindeloos doorlopende rij van dingen. U mag denken aan een rij stippen op een stuk papier. De twee kanten, waarheen de rij eindeloos doorloopt, noem ik linkerkant en rechterkant. We gaan nu spreken over verplaatsingen in deze rij. Een verplaatsing is de overgang van een of andere stip naar een, die een zeker aantal plaatsen rechts of links ligt. Men kan — dat vereenvoudigt de redenering — zo'n verplaatsing uitgevoerd denken uitgaande van alle stippen in onze rij. De rij wordt dan in zijn geheel verplaatst en daardoor op zich zelf afgebeeld. Er zijn verplaatsingen naar links en naar rechts en van beide soorten zijn er oneindig veel. Ook onderscheiden we de nul-verplaatsing, waardoor iedere stip in zich zelf overgaat. Nu is het zonder meer duidelijk, dat het opvolgend uitvoeren van twee gegeven verplaatsingen een resultaat geeft, dat ook door een enkele verplaatsing rechtstreeks kan worden verkregen. Deze noemen we de som-verplaatsing van de twee gegeven verplaatsingen. Het geheel van alle mogelijke verplaatsingen is een zeer eenvoudig voorbeeld van wat de wiskundigen een groep noemen. Een stelsel van bewerkingen (zoals onze verplaatsingen) vormt een groep, wanneer ten eerste het opvolgend uitvoeren van twee van die bewerkingen een resultaat geeft, dat ook door een enkele bewerking uit het stelsel rechtstreeks kan worden verkregen en ten tweede bij iedere bewerking van het stelsel een inverse bewerking in het stelsel aanwezig is, die het resultaat van de eerste vernietigt. Onze verplaatsingen vormen een groep van een bijzondere soort. Hebben we twee verplaatsingen a en b, dan geeft a gevolgd door b hetzelfde resultaat als b gevolgd door a. Een groep met deze eigenschap heet een commutatieve groep of abelse groep, naar de wiskundige *Abel.*

U zult nu misschien vermoeden, dat ik zal zeggen, dat de positieve en negatieve getallen deze verplaatsingen zijn. Dat doe ik niet, want we zouden dan de vermenigvuldiging, in het bijzonder de regel, die de kinderen uitdrukken door „min maal min is plus" niet kunnen begrijpen. We moeten eerst meer gecompliceerde begrippen vormen.

We kunnen een gegeven verplaatsing een zeker aantal malen herhalen. Ook kunnen we een verplaatsing omkeren en dan nog een aantal malen herhalen. Deze bewerkingen, herhalingen en herhalingen gepaard gaande met omkering, zullen we operaties met verplaatsingen noemen. Ze vormen geen groep. Wel is het resultaat van twee van dergelijke operaties opvolgend uitgevoerd te verkrijgen door een zo'n operatie uit te voeren, maar bijna geen enkele van onze operaties heeft een inverse. Men spreekt daarom wel van een halve groep. Zijn α en β

twee operaties met verplaatsingen, dan zullen we onder de productoperatie $\alpha\beta$ de operatie verstaan, die hetzelfde resultaat geeft als de operatie α gevolgd door de operatie β. Men constateert gemakkelijk, dat β gevolgd door α op hetzelfde neerkomt als α gevolgd door β en dat dus $\beta\alpha = \alpha\beta$. Naast $\alpha\beta$ bestaat er nog een andere compositie van α en β. We denken ons de operatie α toegepast op een willekeurige verplaatsing a. Verder denken we ons op dezelfde verplaatsing a de operatie β toegepast. Dat geeft twee verplaatsingen als resultaat. Van deze twee verplaatsingen bepalen we de som-verplaatsing. Het blijkt, dat deze som-verplaatsing ook door een enkele operatie uit de verplaatsing a kan worden verkregen. Deze operatie heet de somoperatie van de operaties α en β. Men stelt deze voor door $\alpha + \beta$. Ook deze compositie is commutatief: $\beta + \alpha$ is hetzelfde als $\alpha + \beta$.

Deze operaties met verplaatsingen nu zijn de positieve en negatieve getallen en het getal nul. Nul is natuurlijk de operatie, die iedere verplaatsing verandert in de nul-verplaatsing. Het is zeer eenvoudig de rekenregels voor de positieve en negatieve getallen af te leiden. Laten we als voorbeeld nemen de regel -1 maal $-1 = +1$. -1 is de operatie, die elke verplaatsing omkeert: -1 maal -1 is dus het resultaat van twee opvolgende omkeringen en dat dit de door $+1$ aangegeven eenheidsoperatie is, dus de operatie, die iedere verplaatsing in zich zelf verandert, behoeft geen nader betoog. Daarmee is de regel verklaard. Driehonderd jaar geleden verkondigde een gezaghebbend auteur, dat de zwakheid van het menselijke verstand een verklaring onmogelijk maakte.

Het geheel der besproken operaties met verplaatsingen, dus de verzameling der positieve en negatieve gehele getallen en het getal nul, die we gezamenlijk de gehele getallen noemen, vormt een zogenaamde ring. Daaronder verstaat men een verzameling van elementen, waarbij men elk tweetal op twee manieren kan samenstellen tot een derde element van de verzameling. De ene samenstelling heet optelling, de andere vermenigvuldiging. Er moet daarbij voldaan zijn aan de eis, dat men de gebruikelijke rekenregels van de algebra kan toepassen.

Het is wel aardig erop te wijzen, dat de beschouwingen, die ons hebben geleid tot het begrip der positieve en negatieve getallen, ook voor een eenvoudiger geval kunnen worden gehouden. In plaats van een naar twee kanten eindeloos doorlopende rij van dingen nemen we een cyclisch gerangschikte rij van een eindig aantal dingen. We kunnen denken aan een rij op onderling gelijke afstanden geplaatste stippen op een cirkelomtrek. We vestigen ook nu weer allereerst onze aandacht op verplaatsingen. Deze kunnen we hier beter draaiingen noemen. Zij vormen nu een commutatieve groep, die bestaat uit eindig veel elementen en wel uit zoveel elementen als het aantal stippen in onze rij bedraagt. We moeten hierbij bedenken, dat, als bijvoorbeeld dit aantal stippen 20 is, een draaiing van 6 de ene kant op hetzelfde

is als een draaiing van 20 — 6 = 14 de andere kant op. Verder, dat een draaiing van 8 gevolgd wordt door een draaiing van 15 in dezelfde richting een resulterende som-draaiing van 3 geeft, enz. Vervolgens gaan we letten op operaties, die we op de draaiingen kunnen toepassen. We kunnen een draaiing enige malen herhalen, omkeren, en beide dingen tegelijk doen. Overigens kan hier elke operatie als een herhaling worden opgevat. Er zijn weer evenveel operaties als het aantal stippen, waarvan we zijn uitgegaan. Op dezelfde manier als bij de operaties met verplaatsingen definiëren we hier een som en een product voor twee operaties met draaiingen. We krijgen dan een ring bestaande uit eindig veel elementen.

Een bijzonderheid treedt op als we uitgaan van een ondeelbaar aantal stippen. Dan blijkt er bij iedere operatie met draaiingen, uitgezonderd de nul-operatie, die elke draaiing omzet in de nul-draaiing, een inverse operatie te behoren, die na de eerstgenoemde toegepast deze opheft. Zo wordt bijvoorbeeld, wanneer we met 5 stippen werken, de operatie, die bestaat in het verdrievoudigen van elke draaiing, opgeheven door de operatie, die bestaat in het verdubbelen van elke draaiing. Een ring met deze bijzonderheid noemt men een lichaam. In een lichaam hebben twee elementen een quotient, mits de „deler" niet nul is. Een lichaam met eindig veel elementen, zoals wij hier ontmoeten, noemt men een veld van *Galois,* naar de ruim een eeuw geleden op 21-jarigen leeftijd overleden geniale Franse wiskundige, wiens naam ook altijd verbonden zal blijven aan de algemene theorie der hogere machtsvergelijkingen.

Deze eindige ringen en lichamen zijn van groot belang voor de getallentheorie. Ik zal even aangeven, hoe men ze, uitgaande van de ring der gehele getallen, meestal invoert. We maken dan tevens kennis met een in de moderne wiskunde veelvuldig voorkomende wijze van begripsvorming. Om de gedachten te bepalen, nemen we als grondtal het aantal 5. Er zijn nu 5 soorten van gehele getallen te onderscheiden: de 5-vouden, de 5-vouden + 1, de 5-vouden + 2, de 5-vouden + 3 en de 5-vouden + 4. Elke soort wordt een restklasse ten opzichte van 5 genoemd. Laten we nu twee van die restklassen nemen. Uit iedere van die twee nemen we een getal. Deze tellen we op. De som ligt in een derde restklasse, en welke getallen we uit de twee gegeven restklassen ook nemen, deze derde restklasse, waarin hun som ligt, blijkt steeds dezelfde te zijn. Daarom kunnen we deze derde restklasse de som van de twee gegeven restklassen noemen. Voor de vermenigvuldiging geldt geheel hetzelfde, zodat we bij ieder tweetal restklassen ook een product-restklasse hebben. We vinden zodoende, dat de 5 restklassen een ring vormen; de ondeelbaarheid van het getal 5 brengt mede, dat deze ring een lichaam is. Het is formeel hetzelfde lichaam als wat we hiervoor geconstrueerd hebben met behulp van de draaiingen in een cyclische rij van 5.

Op onze restklassenring is de ring van de gehele getallen afgebeeld.

Het beeld van een bepaald geheel getal is de restklasse, waarin dat getal ligt. Deze afbeelding heeft de waardevolle eigenschap, dat het beeld van de som van twee getallen de som is van de beelden van die getallen en het beeld van hun product eveneens het product van hun beelden. Een afbeelding van een ring op een andere met deze eigenschap wordt homomorphe afbeelding genoemd. Zo'n homomorphe afbeelding kan bij vele problemen uitstekende diensten bewijzen.

Positieve en negatieve getallen zijn nog slechts een gering aantal eeuwen in gebruik. De gebroken getallen daarentegen vindt men reeds in de grijze oudheid bij alle volken met enige beschaving. Zij staan dan ook veel dichter bij de ervaringen van het dagelijkse leven. Zodra kwesties worden beschouwd, die verband houden met verdeling van hoeveelheden en meting van grootheden als lengten, oppervlakten en inhouden zullen zij optreden en een verdienstelijke rol spelen. Samen met de gehele getallen vormen de positieve en negatieve gebroken getallen een lichaam, het lichaam van de rationale of meetbare getallen. In de wiskunde worden tegenwoordig de rationale getallen op formele wijze ingevoerd als klassen van paren gehele getallen, waarvoor een aantal rekenregels worden vastgesteld. Het is ook mogelijk ze op meer aanschouwelijke wijze in te voeren als operaties; ik zal daar echter verder niet op ingaan.

De rationale getallen zijn de getallen, die in de practijk worden gehanteerd en daar voortreffelijke diensten bewijzen. Toch leiden eenvoudige beschouwingen tot het inzicht, dat het stelsel der rationale getallen ernstige tekortkomingen bezit. U hebt op school geleerd, dat deze tekortkomingen reeds door de Grieken zijn geconstateerd, toen zij het onmeetbare ontdekten. Ook hebt U vernomen welk een ontsteltenis die ontdekking bij hen veroorzaakte. Zij vonden, dat er lijnstukken bestaan, die onderling onmeetbaar zijn. Een klassiek voorbeeld wordt gegeven door de zijde en de diagonaal van een vierkant; deze twee lijnstukken hebben geen gemeenschappelijke maat en dus kan men geen rationaal getal opnoemen, dat hun verhouding uitdrukt. Daaruit blijkt, dat het stelsel der rationale getallen voor de meetkunde niet zo erg bruikbaar is. Het geschikte getallensysteem voor de meetkunde is dat der reële getallen, dat de meetbare en de onmeetbare getallen omvat. De Grieken hebben zich zonder deze weten te redden, en dat op bewonderenswaardige wijze, maar de ontwikkeling van algebraische en analytische methoden na de Middeleeuwen bracht de behoefte aan het reële getal als zelfstandig begrip.

Aanvankelijk heeft men de leer der reële getallen gegrondvest op die der grootheden, bijvoorbeeld lijnstukken. De naam *Descartes* kan hier genoemd worden. De theorie van het reële getal steunt dan op de axioma's van de meetkunde. Deze toestand heeft echter de wiskundigen niet bevredigd. Men wenste een van de ruimteleer onafhankelijk getalbegrip. In de tweede helft van de vorige eeuw is deze wens vervuld. Door *Dedekind*, *Cantor*, *Weierstrasz* en anderen is toen aangetoond.

hoe men het begrip reëel getal kan ontwikkelen op arithmetische wijze, zonder een beroep te doen op enige meetkundige aanschouwing of meetkundige theorie. Daarmede werd de basis gelegd voor wat men genoemd heeft de arithmetisering van de wiskunde, waarbij de gehele wiskunde, de meetkunde inbegrepen, verschijnt als een gebouw, welks enig fundament het begrip natuurlijk getal is.

De imaginaire of complexe getallen, die bij hun eerste optreden in de wiskunde, evenals trouwens de negatieve getallen, door een geheimzinnig waas waren omgeven, kunnen op fraaie wijze meetkundig voor de dag worden gebracht.

We nemen een gewoon plat vlak. In dat vlak beschouwen we rechtlijnige verplaatsingen of vectoren. Deze denken we alle uit te gaan van een vast punt O. Op het geheel van al deze van O uitgaande vectoren denken we ons zekere operaties toegepast. Elk van die operaties zal bestaan uit een vermenigvuldiging van O uit met de een of andere positieve of negatieve factor gecombineerd met een draaiing over zekere hoek. Het blijkt, dat deze operaties, bij voor de hand liggende definities van optellen en vermenigvuldigen, een lichaam vormen. Dit lichaam is het lichaam der complexe getallen. Laten we in het bijzonder eens letten op de operatie, die bestaat uit het draaien van alle vectoren over een hoek van 90° in de positieve zin om O. Deze operatie noemen we i. Onder i maal i hebben we nu te verstaan de operatie, die hetzelfde resultaat geeft als twee opvolgende draaiïngen van 90° om O. Dat is blijkbaar de operatie, die iedere vector omzet in de tegengestelde vector, en deze hebben we voor te stellen door — 1. Zo vinden we op zeer natuurlijke wijze de formule $i^2 = -1$.

De invoering van de complexe getallen was voor de wiskunde een grote verrijking. Zij verschafte tal van nieuwe gezichtspunten en leidde tot de theorie der analytische functies van een complexe veranderlijke, een der mooiste en belangrijkste delen van de wiskunde.

Wij hebben nu een en ander gezegd over de verschillende soorten van getallen, die op vrijwel alle gebieden van de wiskunde en daar, waar de wiskunde wordt toegepast, in gebruik zijn. Veel zou nog te zeggen zijn over allerlei andere getalsystemen. De moderne algebraicus onderzoekt talloze ringen en lichamen, die in hun eigenschappen soms aanzienlijk afwijken van die, welke wij hebben besproken, en die ook voor de toepassingen — men denke aan de quantummechanica — van gewicht zijn. Ik zal daarover zwijgen.

Gaarne zou ik echter tot besluit iets willen vermelden over de oneindige getallen van *Cantor*.

In het begin van deze rede hebben we de leer der natuurlijke getallen opgevat als de leer der eindige verzamelingen. Men kan evenwel ook over oneindige verzamelingen spreken en daardoor ontstaat een vervolg op de theorie van het natuurlijk getal. Een dubbel vervolg, zou men kunnen zeggen, want de begrippen cardinaalgetal en ordinaalgetal gaan hierbij uiteenlopen.

De leer der verzamelingen is de schepping van de wiskundige *G. Cantor.* Zij munt uit door grote schoonheid en heeft op merkwaardige wijze de ontwikkeling van de wiskunde beïnvloed. Ook heeft zij de stoot gegeven tot het ontstaan van uitvoerige discussies over het wezen en de grondslagen van de wiskunde, discussies, waaraan de namen van grote mathematici als *Poincaré, Brouwer* en *Hilbert* zijn verbonden.

Van het begrip verzameling geeft *Cantor* deze definitie: Een verzameling is de samenvatting van zekere dingen van ons denken tot een geheel. Dat is niet bepaald een definitie, die door helderheid uitmunt. Iemand, die niet weet, wat bedoeld wordt, zal het er moeilijk uit kunnen opmaken. Laten we echter doen alsof de zaak ons geheel duidelijk is. Over eindige verzamelingen hebben we gesproken; voorbeelden van oneindige verzamelingen zijn: de verzamelingen van alle natuurlijke getallen, de verzameling van alle ondeelbare getallen, de verzameling van alle continue functies van een reële veranderlijke, enz.

Hoe beoordeelt men of twee oneindige verzamelingen A en B „even groot" zijn? Op dezelfde manier als bij eindige verzamelingen, dus door na te gaan of men de elementen van A een-aan-een kan laten corresponderen met de elementen van B. Er treedt nu echter een merkwaardig verschijnsel op. Het oude axioma „het deel is kleiner dan het geheel" is niet meer geldig. Neem voor A de verzameling van alle natuurlijke getallen en voor B de verzameling van alle even natuurlijke getallen. Laat nu het getal 1 van A corresponderen met het getal 2 van B, het getal 2 van A met het getal 4 van B, het getal 3 van A met het getal 6 van B, enz. A is dan een-aan-een afgebeeld op B. A en B zijn dus „even groot", ofschoon B een deel is van A.

In plaats van de uitdrukking „A en B zijn even groot" gebruikt men de uitdrukking „A en B hebben dezelfde machtigheid" of „A en B stellen hetzelfde cardinaalgetal voor". De vraag dringt zich op of misschien niet alle oneindige verzamelingen dezelfde machtigheid hebben. Dan zou er maar één oneindig cardinaalgetal zijn. Het antwoord is ontkennend. Zeer eenvoudig kan men namelijk bewijzen, dat de verzameling van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling een grotere machtigheid heeft dan die gegeven verzameling. Daarmee bedoelt men met de uitspraak, dat A een grotere machtigheid heeft dan B, dat B wel een-aan-een kan worden afgebeeld op een deel van A, maar niet op A zelf.

Zo blijkt, dat er onbegrensd veel oneindige cardinaalgetallen zijn. De kleinste oneindige machtigheid is die van de verzameling der natuurlijke getallen. Men noemt dit de aftelbare machtigheid. Misschien verbaast het U te horen dat ook de verzameling van alle meetbare getallen de aftelbare machtigheid heeft. De verzameling van alle reële getallen, dus van alle punten op een lijn, daarentegen is niet aftelbaar.

Reeds vroeg kwam *Cantor* tot het inzicht, dat de verzameling van alle punten van een plat vlak en ook de verzameling van alle punten

van de ruimte dezelfde machtigheid heeft als de verzameling van alle punten op een rechte lijn. Aanvankelijk meende *Cantor* daaruit te moeten concluderen, dat er met ons dimensiebegrip iets niet in orde was. Men kan dat lezen in brieven, die hij over deze zaak aan *Dedekind* schreef. *Dedekind* wees er echter op, dat de een-aan-een-afbeeldingen van de punten van een plat vlak en van de punten van de ruimte op de punten van een rechte lijn, die *Cantor* aangegeven had, discontinu waren, en dat bij continue een-aan-een-afbeeldingen de dimensie wel bewaard zou blijven. Latere onderzoekingen, met name die van *Brouwer,* hebben dit geheel bevestigd.

Oneindige ordinaalgetallen zijn oneindige welgeordende verzamelingen. Een verzameling heet geordend, wanneer krachtens de een of andere afspraak van elk tweetal van haar elementen het ene voor het andere komt. Die afspraak moet zo zijn, dat, als a voor b komt en b voor c, a ook voor c komt. Een geordende verzameling heet welgeordend, als de verzameling zelf en ook iedere deelverzameling een eerste element heeft. Voorbeelden zijn: elke eindige geordende verzameling, de rij der natuurlijke getallen, de rij der natuurlijke getallen gevolgd door nog een element, de rij der natuurlijke getallen gevolgd door nog eens de rij der natuurlijke getallen, enz.

Wanneer men twee welgeordende verzamelingen heeft, dan zijn zij of gelijk, of de ene is gelijk aan een beginstuk van de andere. Daaruit vloeit voort, dat iedere verzameling van ordinaalgetallen weer welgeordend is. In het bijzonder heeft ieder ordinaalgetal en ook iedere verzameling van ordinaalgetallen een opvolger.

Het kleinste ordinaalgetal is 1. Daarop volgen de andere eindige ordinaalgetallen 2, 3, 4, enz. Na al deze komt het kleinste oneindige ordinaalgetal, dat men door ω aangeeft en dat gedefinieerd wordt door de rij der natuurlijke getallen. Dan komt $\omega + 1$, gedefinieerd door de rij der natuurlijke getallen gevolgd door nog een element, dan $\omega + 2$, enz. Twee opvolgende rijen van de natuurlijke getallen bepalen, wat men noemt 2ω. Daarop volgen $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, $2\omega + 3$, enz. Dan komt 3ω, $3\omega + 1$, $3\omega + 2$, enz. Zo verder gaande komen we bij ω^2, $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, ..., $\omega^2 + \omega$, enz. enz. Het verschiet is inderdaad duizelingwekkend.

Ieder ordinaalgetal heeft een zekere machtigheid. Ik moet bekennen, dat ik mij geen ordinaalgetallen van hogere dan de aftelbare machtigheid kan voorstellen, maar *Zermelo* bewees met behulp van zijn veelomstreden keuze-axioma, dat iedere verzameling kan worden welgeordend, en daaruit volgt, dat er ordinaalgetallen zijn van willekeurig hoge machtigheid.

Het geheel van alle ordinaalgetallen, waarvan de machtigheid een bepaalde grens niet overschrijdt, noemt *Cantor* een getalklasse. Zo bestaat de eerste getalklasse uit alle eindige ordinaalgetallen. Hun verzameling en dus het op hen volgende ordinaalgetal ω heeft de aftelbare machtigheid, die men wel Aleph-0 noemt. De tweede getalklasse

bestaat uit alle aftelbare ordinaalgetallen. Hun machtigheid en dus die van het op hen volgende ordinaalgetal is de kleinste niet-aftelbare machtigheid. Deze noemt men Aleph-1.

Zoals ik reeds heb gezegd, heeft het continuum, dat is de verzameling van alle punten op een rechte lijn, een hogere machtigheid dan de aftelbare. Nu heeft men nog nooit een verzameling van punten op een rechte lijn gevonden, die een machtigheid heeft groter dan de aftelbare en kleiner dan die van het continuum. Dit leidde *Cantor* tot het opstellen van de hypothese, dat de machtigheid van het continuum Aleph-1 is. Al zijn pogingen dit te bewijzen bleven echter zonder resultaat en ook heden ten dage is het zogenaamde continuumprobleem nog onopgelost.

Het werk van *Cantor* heeft tot veel kritiek aanleiding gegeven. Dat deze kritiek niet ongerechtvaardigd is, blijkt al uit het feit, dat de leer der verzamelingen tot paradoxen leidt. Zelf heeft *Cantor* al geworsteld met het paradoxale in de verzameling van alle ordinaalgetallen. Veel zou er over deze paradoxen te vertellen zijn, veel ook over de op dit gebied zo sterk naar voren komende geschilpunten tussen de logici en axiomatici en de intuïtionisten. Ik zou daarmede echter allicht de grenzen van mijn onderwerp en de tijd, op welke ik beslag mag leggen, overschrijden, en wil daarom nu deze beschouwing van de verschillende soorten van getallen laten eindigen.

VAN DE PERSONEN.

G. Mannoury.

Professor... de pen trekt ons om te schrijven Doctor! Maar neen, dit is wettelijk nog niet op Mannoury van toepassing. Er moeten wel goede redenen voor zijn, dat, op een zuiver wetenschappelijk gebied als de wiskunde is, men den titel professor draagt maar dien van doctor nog niet bezit. Maar het is moeilijk om voor niet deskundigen de groote verdiensten van Mannoury, laat staan de bijzondere plaats, die hij inneemt, duidelijk te maken. Laat ons toch met alle gevaren van dien een zwakke poging daartoe doen.

In het begin van deze eeuw ontdekten de mathematici, dat er zelfs voor de wiskunde geen „taal" mogelijk was, dat wil zeggen een taal, die bij de gedachtenwisseling misverstand en bij het gebruik fouten uitsluit; men leerde toen ook voor de wiskunde het belang van de significa, de leer der „taaldaden" inzien. Het opvallendste deel van het signifisch onderzoek is het scheiden van de aanwijzende, op overeenkomst en verschil gerichte en de emotioneele beteekeniselementen, die voor spreker en hoorder verschillend kunnen zijn. Het signifisch onderzoek van de wiskundige termen werd door Mannoury met kracht ter hand genomen. Bij het onderzoek van de grondslagen der wiskunde was een strijd ontstaan over het „tertium non datur": „Een uitspraak is juist òf onjuist; een derde mogelijkheid bestaat niet —" de klassieke opvatting en de daartegenoverstaande meer moderne richting die meent: Een uitspraak is juist òf niet juist òf het is niet uit te maken of deze juist of onjuist is. Nog praegnanter: het ging vooral om de vraag of „niet (niet juist)" hetzelfde inhoudt als „juist"; over de ontkenning, de negatie en de dubbele negatie.

Mannoury heeft een onderzoek ingesteld naar de indicatieve beteekenis van verschillende wiskundige termen, er op gewezen, dat men ook in de wiskunde den levenden mensch niet kan uitschakelen en onder meer de belangrijke onderscheiding in de ontkenningen van „keuzenegatie" en „uitsluitingsnegatie" ingevoerd. Laat ons de aanduiding van het wetenschappelijk werk van Mannoury besluiten met deze begrippen met een enkel woord nader toe te lichten.

Wanneer de commissaris van Politie weet, dat in zijn bureau zijn gebracht de vagebonden Robert en Bertram en hij hoort op zijn vraag aan één van hen „Ben jij Robert?" het antwoord: „Neen"

dan weet hij door deze ontkenning, dat de andere Robert is en de toegesprokene Bertram. Uit het tweetal mogelijkheden wordt door de negatie een positieve conclusie mogelijk. Er is sprake van een „keuzenegatie".

Geheel anders ligt het bij de „uitsluitingsnegatie", die niets anders inhoudt dan: „Dit niet". Enkele voorbeelden van begrippen die op een uitsluitingsnegatie berusten zijn: „niets", „leeg", „oneindig". Hoe Mannoury dit volgens de zeer eigen methode duidelijk maakt moge blijken uit een citaat over het begrip ‚niets" ontleend aan zijn werk „Mathesis en Mystiek":

„Iemand heeft drie appels en verliest er drie, wat houdt hij over?" Maar mijn hemel, hoe kan ik dat weten? Een peer misschien, of zijn goede naam, of de kluts? En nu wil ik wel heel gehoorzaam „niets" zeggen, maar hoe die niets er nu uitziet, dat is het wat ik zoo graag weten wou. Ik heb het mijn buurman de schoolmeester gevraagd, die berucht is om z'n onverstoorbaar geduld, maar de man is na een half uur woedend weggelopen. Het begon toch hoopvol: „de zaak is eenvoudig, meneer, dat u deze opgave niet goed hebt gelezen. De bedoeling is dat die man enkel drie appels heeft, en niets anders, begrijpt U? Of althans, dat u niets anders mee moogt tellen". Maar toen ik schuchter giste, dat met „niets anders" dan zeker zijn eetlust bedoeld zou zijn, beweerde hij, dat ik hem voor de gek hield."

Met deze enkele opmerkingen loopt men het gevaar, bij niet-wiskundigen de vraag te doen opkomen of dergelijke subtiele onderscheidingen nu zoo belangrijk zijn en of men daaraan gedurende een geheel menschenleven zijn werkkracht kan besteden. Het zij ons vergund erop te wijzen, dat niet slechts één doch vele menschenlevens gevuld zijn en nog gevuld zullen worden door arbeid op het terrein, waarop Mannoury een der pioniers is. Het is echter niet wel mogelijk daarop hier verder in te gaan.

Maar zal men dan anderzijds niet vragen: Hoe komt het dan, dat de titel Doctor tot nu toe aan Mannoury ontbroken heeft als hij een dergelijk voortreffelijk geleerde is en zooveel belangrijk wetenschappelijk werk verricht heeft? Het antwoord op deze vraag kan de rij der door hem afgelegde examina, vergeleken met zijn loopbaan, die in telegramstijl geschetst worden, leveren.

Gerrit Mannoury, geboren 17 Mei 1867 te Wormerveer, eindexamen H.B.S. te Amsterdam 1885, onderwijzersacte 1885, wiskunde M.O.K. I 1887, hoofdacte 1890, M.O. Boekhouden 1893, M.O. mechanica 1895, wiskunde M.O.K. V 1902, staatsexamen 1907.

1886—1888 bij het L.O. te Amsterdam, 1891—1893 leeraar wis-

kunde en boekhouden, 1893—1905 goeverneur en onderwijzer te Bloemendaal, 1906—1910 leeraar H.B.S. te Helmond, 1910—1917 leeraar aan de O.H.S. te Vlissingen. Tevens omstreeks 1902 in de accountantspractijk, van 1903—1910 privaat-docent in de logische grondslagen der wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. In 1917 buitengewoon hoogleeraar en sedert 1918 gewoon hoogleeraar te Amsterdam.

Zie hier de moeizame weg, afgelegd tot het professoraat bereikt werd en waarvan de moeilijkheid niet in de laatste plaats veroorzaakt zal zijn door het feit, dat Mannoury zich zelfs „communist" noemde in een tijd, waarin men elkaar voor elken socialist nog waarschuwde met de woorden: Pas op, die is sociaal. Hoeveel grooter moeten de moeilijkheden voor Mannoury dan nog niet geweest zijn, die bovendien door de „communisten" niet als goed communist werd gezien — een ieder weet het uit het royement van 1929.

Men zie bovendien het merkwaardige, dat hij, die sedert 1903 aan de Universiteit doceerde, in 1907 het staatsexamen, d.i. toelatingsexamen tot de Universiteit, tot student deed! Verder zijn geen Universitaire examina gevolgd. Vanzelfsprekend!

Het zal een ieder tot groote vreugde en voldoening stemmen, dat op 16 September 1946 aan Mannoury tenslotte het doctoraat honoris causa zal worden verleend. Gelukkig is Mannoury levenskrachtig genoeg gebleken om deze onderscheiding, die veel en veel te laat wordt toegekend, nog te beleven.

Persoonlijk komt het ons voor, dat Mannoury zich reeds lang Prof. Dr. had kunnen noemen. Zooals — Cicero zinspeelt daarop in zijn rede De imperio Cn. Pompei — § 28 —, bij de gebeurtenis ons door Plutarchus (Pomp. cap XXII) verteld —, Pompeius Magnus, die niet op de wettelijk voorgeschreven loopbaan kon terugwijzen op de vraag van den censor of hij zijn diensttijd naar behooren had volbracht antwoordde: *πασας στρατειας ἐστρατευμαι, και πασας ὑπ ἐμαυτῳ αὐτοκρατορι.*

Mijn dienst heb ik volbracht en wel onder mij zelf als opperbevelhebber, zoo ook zou Mannoury, gesteld, dat iemand er bezwaren tegen zou hebben gehad, dat hij zich doctor noemde op de vraag of hij zijn universitaire studie wel had voltooid kunnen antwoorden: Ik heb mijn studie universitair voltooid — me ipso professore.

Amsterdam, 8 Sept. 1946. E. M. BRUINS.

W. K. Walstra, leraar aan de Chr. H.B.S. in Rotterdam-Zuid, promoveerde 10 Juli 1946 aan de Rijks-Universiteit te Leiden op proefschrift: „Isothermen van helium bij temperatuur beneden 20,5° K".

Bij zijn stellingen trof ik er enige aan, die het vermelden in „Euclides" waard zijn, nl.:

1°. (No. VIII). Ten onrechte wordt bij het natuurkunde-onderwijs op middelbare scholen aan de qualitatieve behandeling van de proef van Clément en Desormes over de adiabatische uitzetting van gassen weinig of geen aandacht geschonken.

2°. (No. IX). De nadelen, verbonden aan het twee-rondensysteem, zoals dat bij het natuurkunde-onderwijs op hogere burgerscholen moet worden gevolgd, zijn groter dan de voordelen.

3°. (No. X). Het bestuderen van cirkelsystemen in het platte vlak geschiedt het beste door middel van afbeelding op de ruimte. Hierbij verdient de methode, waarbij men als derde coördinaat de macht van de oorsprong t.o. van de cirkel neemt, de voorkeur boven die, waarbij men deze coördinaat gelijk neemt aan de straal van de cirkel.

4°. (No. XI). Bij het meetkunde-onderwijs is het gewenst de leerlingen vroegtijdig (reeds vóór de behandeling van de congruentie) met enkele eenvoudige constructies vertrouwd te maken.

5°. (No. XII). Het behandelen van differentiaal- en integraalrekening op hogere burgerscholen heeft weinig zin.

Dr J. N. van der Ende (Dir. H.B.S. Middelharnis) is sinds 1 Mei '46 directeur van de 1ste H.B.S. in Den Haag. Voor de H.B.S. in Middelharnis heeft hij dank zij zijn nieuwe inzichten veel betekend.

Rotterdam. G. J. VAN DEN BERG.

Dr P. H. van Laer te Roermond is benoemd tot bijzonder hoogleraar in de Thomistische Wijsbegeerte te Leiden vanwege de Sint Radboud-stichting voor Thomistische Wijsbegeerte.

Dr L. N. H. Bunt, leraar aan de Chr. H.B.S. te Leeuwarden, is benoemd tot conservator van het Paedagogisch Instituut aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Dr A. C. Zaanen is toegelaten als privaat-docent aan de Rijksuniversiteit te Leiden.

Adriaan Cornelis Zaanen, geb. 14 Juni 1913 te Rotterdam, studeerde te Leiden, promoveerde in 1938 op proefschrift „Over reeksen van eigenfuncties van zekere randproblemen". Publicaties op het gebied van randproblemen, lineaire transformaties in Hilbertsche ruimten en integraalvergelijkingen.

Onderwerp voor de colleges: Integralen van Lebesgue, ruimten en integraalvergelijkingen van Hilbert.

Koninklijke onderscheidingen.

J. van Andel, Inspecteur van de lycea, is benoemd tot ridder in de orde van de Nederlandse Leeuw.

Ir J. C. Deuss, Directeur van de R.K. H.B.S. te Arnhem

en Ir C. van Drooge, Directeur van de gemeentelijke H.B.S. van Delft, zijn benoemd tot officier in de orde van Oranje Nassau.

KORRELS.

LXX.

De uiterste en middelste reden.

Als a verdeeld wordt in $a - x$ en x zo, dat $(a - x) : x = x : a$. dan zegt men, dat a in de uiterste en middelste reden wordt verdeeld. In orde; maar tot heden weet ik, eerlijk gezegd, nog niet, welke de uiterste reden is, welke de middelste en nog minder, welke dan de derde is; als er een middelste reden is, dan moeten er op zijn minst drie zijn, dacht ik zo. Wie helpt me? P. W.

Poging tot beantwoording van Korrel LXX.

Zo als ze er staat, is de uitdrukking inderdaad onbegrijpelijk. Maar laten we een poging doen, haar ontstaan te begrijpen.

Wanneer een lijnstuk in uiterste en middelste reden verdeeld wordt, ontstaan er twee stukken, waarvan het ene als een der uiterste termen en het andere als middelste term in een z.g. gedurige evenredigheid (*ἀναλογία συνεχής*) of evenredigheid in drie termen (*ἀναλογία ἐν τρισὶν ὅροις*) optreedt; het lijnstuk zelf is dan de andere uiterste term. Men zou nu als korte omschrijving van deze verdeling kunnen verwachten: een lijnstuk verdelen in een uitersten en een middelsten term (sc. van een evenredigheid). Is het nu denkbaar, dat deze elliptische, maar in haar afgekortheid correcte omschrijving in de practijk verbasterd is tot het *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνειν* dat wij letterlijk vertalen door „in uiterste en middelste reden verdelen"?

Er bestaat een aanwijzing, dat dit niet ondenkbaar is. In de 2e definitie van het zesde boek van de Elementen vindt men nl. een omschrijving van *ἀντιπεπονθότα σχήματα* (omgekeerd evenredige figuren) die als volgt luidt:

Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοι τε και ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Als men dit letterlijk vertaalt, wordt het ook onbegrijpelijk. Men krijgt dan namelijk: Figuren zijn omgekeerd evenredig, wanneer er in elk van beide figuren voorgaande en volgende redens zijn.

De bedoeling is echter duidelijk: er wordt b.v. gedacht aan gelijke en gelijkhoekige parallelogrammen, waarvan de lengten der zijden opv. zijn a_1, b_1 en a_2, b_2. Nu geldt de evenredigheid $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$.

Het eerste parallelogram bevat dus een voorgaanden *term* (a_1) en en een volgenden *term* (b_1), het tweede eveneens (opv. b_2 en a_2). Dit zou met de sterk afkortende uitdrukkingswijze, waarvan de Griekse wiskundigen zich zo graag bedienen, omschreven kunnen worden als: wanneer er in elk van beide figuren een voorgaande en een volgende *term* (van de evenredigheid tussen de zijden) is. Maar inplaats van *term* staat er *reden*.

Men houdt nu weliswaar algemeen de 2e definitie van het 6e Boek voor een interpolatie van Heroon (die haar letterlijk vermeldt in *Definitiones*, Nr. 118; ed Heiberg p. 74), maar hieraan kan voor ons doel geen bezwaar worden ontleend. Het gaat slechts om de mogelijkheid, dat het in het enigszins slordige dagelijkse spraakgebruik van de Griekse wiskundigen niet uitgesloten was, dat men *λόγος* (reden) zei, als men *λόγου ὅρος* (term van een reden) bedoelde. Nu we eenmaal gezien hebben, dat dat gebeuren kon, is het niet onwaarschijnlijk, dat we in het geval van *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνειν* met een soortgelijk verschijnsel te maken hebben en dat deze uitdrukking dus eigenlijk moest luiden: in een uitersten en middelsten term verdelen. E. J. D.

LXXI.

Onder dezelfde noemer brengen.

Bij het zoeken naar wat anders in jaargang 16 van Euclides viel mijn oog op Korrel XLIV van de hand van Prof. Van Dantzig. Met het grootste gedeelte ben ik het eens en het is goed, dat enige fouten onder de aandacht van de leraren zijn gebracht. Met nr. 6 van blz. 143 ben ik het echter niet eens; dit nummer luidt:

„Mag ik hiervoor de medewerking van de Nederlandse Wiskundeleraren inroepen, opdat in het vervolg door eindexaminandi twee breuken *tot* een gemeenschappelijke noemer herleid en niet meer *„onder* dezelfde noemer *gebracht”* worden. (Hoe zou dat moeten geschieden?)”

De uitdrukking „onder dezelfde noemer brengen” is volkomen in orde; zij betekent niet anders dan „dezelfde naam geven”; $3/4$; de noemer geeft de naam van de delen, de teller telt ze. Noemer en naam geven zijn synoniem; de verwantschap van noemer en naam is klaar genoeg. Prof. Van Dantzigs vraag: hoe zou dat moeten geschieden, is bedoeld als: „onder dezelfde noemer brengen” is onzin; maar dat is het niet; integendeel, volkomen in orde.

Verkeerd is het te zeggen, zoals men wel ziet: „op dezelfde noemer brengen"; alsof „onder" een plaats bepaalt, die er niet is; en „op" een noemer gaat, wat de plaats betreft, wel.

Wat prof. Van Dantzig voorstelt: twee breuken *tot* een gemeenschappelijke (dezelfde is korter) noemer herleiden, is er m.i. glad bezijden; het is niet eens Nederlands; ik bgrijp dat *tot* helemaal niet.

P. W.

Ik kan Van Dantzig's bezwaar tegen „onder denzelfden noemer brengen" evenmin delen als Wijdenes. De uitdrukking zou slechts dan af te keuren zijn, wanneer „onder" plaatselijk moest worden opgevat; gelijknamige breuken staan inderdaad niet beneden hun gemeenschappelijken noemer (ook niet er boven; de wel eens voorgestelde correctie „op denzelfden noemer brengen" is dus niet te aanvaarden). Maar, zoals Wijdenes terecht opmerkt: noemer beduidt benaming; in de Middeleeuwen sprak men in het Latijn van denominatio naast denominator en voordat het Bamberger Rechenbuch (1483) den term Nenner invoerde, had men in het Duits Benennung. „Onder een zelfden noemer brengen" beduidt dus „onder dezelfde benaming brengen"; als men $^3/_4$ en $^2/_5$ opv. schrijft als $^{15}/_{20}$ en $^8/_{20}$ heeft men ze beide als een aantal twintigsten benoemd.

Zolang men nu de andere uitdrukking „tot een zelfden noemer herleiden" opvat als „tot een zelfde benaming brengen" kan men er al evenmin bezwaar tegen maken. Uit de 12e eeuw kennen we de uitdrukking „deducere ad inferiorem differentiam" en uit de 13e nog sprekender: „dissimilium denominationum fractiones ad minucias similium denominationum reducere" (breuken van verschillende benaming tot breuken van dezelfde benaming herleiden). De broederlijke vereniging, waarin de termen denominatio en reducere in deze omschrijving voorkomen, schijnt er dus op te wijzen, dat de twee over en weer betwiste uitdrukkingen „onder een zelfden noemer brengen" en „tot een zelfden noemer herleiden" beide even goed zijn.

Toch is dit bij nadere beschouwing niet het geval. Wanneer men zegt, dat een uitdrukking tot iets anders herleid wordt, dan bedoelt men daarmee, dat zij een anderen vorm krijgt, maar haar waarde behoudt. Men kan dus $^3/_4$ herleiden tot $^{15}/_{20}$. Men heeft dan echter de breuk $^3/_4$ niet herleid tot den noemer 20, maar tot een breuk met den noemer 20. Zo zei de 13e-eeuwse wiskundige het ook: hij spreekt niet van reducere ad similem denominationem, maar van reducere ad minutias similium denominationum.

Ik zou dus willen blijven spreken van „onder een zelfden noemer brengen" en de door Van Dantzig aanbevolen uitdrukking willen amenderen tot „herleiden tot breuken met een zelfden noemer". Maar „gelijknamig maken" is het allereenvoudigste!

E. J. D.

Sluit me bij de laatste alinea van E. J. D. gaarne aan.

D. D.

LXXII.

Waar zit de fout?

Zoekende naar een bewijs voor de stelling van Morley (zie Euclides Jg. IX blz. 40—55 *Red.*) kwam ik er toe om de volgende hulpstelling te poneren:

De meetkundige plaats van de punten binnen driehoek ABC, zó gelegen, dat hoek PAB staat tot hoek CAB als hoek PBA tot hoek CBA, is een recht lijnstuk.

Deze stelling nu is vals, zoals gemakkelijk uit een tegenvoorbeeld blijken kan. Dus is het volgende „bewijs" voor deze stelling fout.

Door de evenredigheid worden de stralen AP van bundel A één-éénduidig gekoppeld aan de stralen BP van bundel B. Twee projectieve stralenbundels brengen een kegelsnede voort. In dit geval een ontaarde, omdat BA toegevoegd is aan AB. Afgezien van deze samenvallende stralen is dus de meetkundige plaats een rechte.

Waar schuilt de fout in dit „bewijs"?

P. J. VAN LENT.

LXXIII.

EUCLIDES ITERUM A MACULA VINDICATUS

door

L. CRIJNS.

Met 't navolgende wordt beoogd 'n weerlegging (in beide instanties: laag en hoog) van de beschuldiging, die de heer Janssen gericht heeft aan 't adres van de gestrekte hoek met deellijn (Euclides 21, Nr 3, 4 blz. 87 boven).

Zij AOB de gestrekte hoek, OC de deellijn. Voor 'n punt P binnen hoek AOC b.v. is de afstand tot OA 't bekende loodlijnstuk, van de afstand tot OB echter is hier *geen sprake,* als we de zaak van elementair standpunt beschouwen: OB immers is als been van 'n hoek 'n *halve* lijn. Het heeft dus geen zin, hier te spreken van gelijke afstanden; alleen ingeval P punt is van OC, bestaan beide afstanden en zijn ze gelijk.

In hoger beroep komt mijn verweer in nog klaarder licht te staan. Onder de afstand van twee figuren F_1 en F_2 moeten we nl. thans begrijpen de onderste grens van de afstanden P_1P_2, waar $P_1 \varepsilon F_1$ en $P_2 \varepsilon F_2$. Voor $F_1 \equiv P \varepsilon \overline{AOC}$ en $F_2 \equiv OA$ is die onderste grens 't loodlijnstuk PD, voor $F_2 \equiv OB$ echter is dat PO, *niet* gelijk aan PD. Alleen en uitsluitend voor $P \varepsilon \overline{OC}$ worden beide onderste grenzen aangewezen door PO en zijn ze dus gelijk.

Opmerking. 't Is mogelijk, dat iemand nog tobt over 't geval van de *in*springende hoek; want als men daarbij vasthoudt aan de letter van de wet (de hogere, eigenlijke definitie van afstand), dan zou men als meetkundige plaats moeten beschouwen de verzameling van alle punten binnen 'n hoek; maar 1⁰ heeft dat geval weinig zin en wie dat wil, kan in de stelling lezen: de deellijn van 'n uitspringende hoek; 2⁰ wie in deze materie moeilijkheden ontmoet, moet die niet aan de meetkunde wijten, maar aan zich zelf: de natuurlijke, nl. ongerepte figuur bestaat uit twee *lijnen* met twee deellijnen.

Antwoord.

De redactie geeft mij de gelegenheid om direct te reageren op het door Dr L. Crijns ingezondene; waarvoor mijn dank.

Terloops moge ik opmerken, dat ik de gestrekte hoek een goed hart toedraag en hem niets verweten heb noch zulks ooit zal doen.

Wat de zaak zelve aangaat, is het direct duidelijk dat alles afhangt van de definitie van afstand van een punt tot een lijn, een halve lijn of een lijnstuk.

Om de gebruikte terminologie te volgen:

Laag. Alle mij bekende leerboeken stellen zich op het „lage" standpunt. 'k Noem er enkele: Wijdenes en de Lange, 1e deel, 11e druk, p. 31: „De loodlijn, die uit een punt P op een rechte wordt neergelaten, is, naar wij zagen, korter dan elke schuine lijn, die men uit P naar die rechte kan trekken. De lengte van die loodlijn heeft de afstand van het punt P tot de rechte lijn."

Dr B. P. Haalmeyer: 1e deel, 3e druk, p. 32: „Onder de afstand van een punt buiten een lijn tot die lijn, verstaat men het stuk van

de loodlijn door dat punt op die lijn, gelegen tussen dat punt en het voetpunt. Onder de afstand van een punt tot een halve lijn of een lijnstuk, verstaat men de afstand van dat punt tot de lijn, waartoe die halve lijn of dat lijnstuk behoort.

Zo ook J. H. Schogt p. 42.

Ieder, die zich op dit standpunt stelt, zal de juistheid van de door mij gemaakte opmerking inzien.

Hoog. De praktijk van het leven doet dikwijls het lagere vóór het hogere kiezen. Zo ook hier. „Afstand ≡ kortste verbindingslijn" is een zeer aantrekkelijke definitie, maar brengt allerlei bezwaren met zich. De heer Crijns wijst er zelf reeds op in verband met een inspringende hoek. Meerdere moeilijkheden zijn gemakkelijk aan te wijzen.

Vindt U het bv. nog al eenvoudig om vanuit het „hogere" standpunt de afstand van een punt tot een zijde van een drievlakshoek *aan te wijzen?*

Intussen ben ik den heer Crijns dankbaar voor zijn opmerkingen. Het draagt bij tot verheldering van inzicht en 't is een bewijs te meer voor wat ik schreef op pag. 83: Dagelijks betrappen we ons er op incorrecte dingen te doen, slordig te zijn in gedachten, in woorden en in daden en wat nog erger is: *heel vaak zijn we er ons niet van bewust.*

N.B. Zullen we de vraag of Euclides *be*smet dan wel *ont*smet is, maar laten rusten?

G. A. JANSSEN.

ENIGE OPMERKINGEN OVER HET ONDERWIJS IN DE MEETKUNDE IN DEZE TIJD

door

Dr Ph. DWINGER.

Het onderwijs in de meetkunde in de laatste decennia beweegt zich tussen twee uitersten. Er ontstonden zelfs volgens R e i n d e r s m a twee richtingen in de didactiek der wiskunde nl. de *psychologische* en de *logische* richting.

Al is het naar mijn mening [1]) te ver gezocht om over twee *rich-*

[1]) Zie ook Dr E. W. Beth. De psychologische argumenten en richtlijnen van de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde. Euclides XVI, 1.

tingen te spreken, toch valt niet te ontkennen, dat dan weer eens de nadruk op het ene, dan weer op het andere element wordt gelegd.

Wanneer men zich afvraagt, waardoor deze belangrijke divergentie optreedt dan moet m.i. op enige punten de aandacht gevestigd worden.

Daar is in de eerste plaats de erkenning dat het geestelijk peil van den leerling in hoge mate zijn stempel moet drukken op de didactiek van het vak. De didactiek dient nu eenmaal ingesteld te zijn op den leerling, wil ons onderwijs vruchtdragend zijn.

Daarnaast moeten wij onze blik richten op de wiskunde zelf en ons opnieuw afvragen, wat het doel van ons onderwijs in de wiskunde is. Afgezien van de overigens hoogst belangrijke practische waarde, dienen wij ons er steeds bewust van te zijn, dat er nog andere doeleinden bij het wiskunde-onderwijs nagestreefd moeten worden.

Den jongen mens nader te brengen tot het wezen van dit product van de menselijke geest, hem de schoonheid ervan te tonen en de bekoring ervan te doen ondergaan moet onze taak steeds blijven. De eerbied voor onze cultuur, tot welks opbouw de wiskunde een belangrijke bijdrage geleverd heeft, zal bij den jongen mens aangebracht worden, wanneer hij zich bewust wordt van de bewondering, die hij gevoelt voor de scheppingen van de menselijke geest in de wiskunde.

Bij dit alles dienen wij echter ernstig rekening te houden met de ontwikkeling van de wiskunde zelf. Willen wij ons onderwijs goed geven en niet stil blijven staan, dan dienen wij steeds contact te houden met de levende wetenschap. Achter ons onderwijs dient steeds de wetenschap te staan, zoals hij nu is en niet, zoals hij 2000 jaar geleden was.

Ik herinner hier bv. aan de ontdekking der niet-euclidische meetkunden, van de meerdimensionale meetkunde en een in samenhang daarmee staand onderzoek naar de axiomatische opbouw der meetkunde. De strijd om het beroemde parallelenaxioma was daarmee beslist. Het onderzoek naar de axiomatische opbouw der meetkunde leidde tot de erkenning, dat het mogelijk is de meetkunde op te bouwen uitgaande van niet gedefinieerde grondbegrippen, waartussen met behulp van axioma's bepaalde relaties vastgelegd worden. Betekende in de oudheid een axioma een vanzelfsprekende waarheid ontleend aan de realiteit, in onze tijd ziet men in een axioma, een voorschrift, dat aan de grondbegrippen en hun relaties wordt opgelegd.

Al maakt dit naar het uiterlijk niet veel onderscheid — zolang de

wiskunde, in casu de meetkunde, zich nauw aansluit bij de ruimte, waarin wij leven — in wezen is de gewijzigde opvatting van fundamentele betekenis.

Men heeft op deze wijze een meetkunde opgebouwd, die volkomen logisch en los van elke aanschouwing is.

Ik noem deze punten natuurlijk niet om ze een plaats te willen geven in ons onderwijs, maar wel, omdat wij bij ons meetkundeonderwijs ons bewust dienen te zijn van deze belangrijke feiten, die immers het huidige beeld van de meetkunde mede bepalen.

De leerling van heden is diep overtuigd van de absolute waarheid der bewezen (en niet bewezen) stellingen en de „logische" opbouw der meetkunde. Hij is zich in het algemeen niet bewust van menige concessie, die aan zijn jeugdige leeftijd is gedaan bij deze „logische" opbouw.

Het theorema over de som van de hoeken van een driehoek blijft menigeen lang in het geheugen hangen en geldt als een van de belangrijkste onomstotelijke waarheden in de meetkunde. Mededelingen als die, dat de grote wiskundige Gausz het nodig oordeelde bedoeld theorema proefondervindelijk te toetsen en dat in de ruimte, waarin wij leven, dit theorema niet geldt en dat onze ruimte „gekromd" is enz. enz., wekken dan ook verbazing en ongeloof, maar doen ook vaak twijfel ontstaan aan de goede kwaliteit van het vroeger geleerde.

Ik weet zeer goed, dat wij dit niet in ons onderwijs zonder meer kunnen verwerken, maar ik wil toch wel wijzen op het feit, dat de huidige stand van een zelfs zo abstracte wetenschap als de wiskunde de mens niet onberoerd hoeft te laten.

Wanneer wij ons nu weer wenden tot het onderwijs in de meetkunde, dan geloof ik te mogen zeggen, dat een onderwijs in dit vak, dat aan alle eisen van wetenschappelijkheid en strengheid voldoet en dus op zuiver axiomatische grondslag wordt opgebouwd, voor het middelbaar onderwijs niet te gebruiken is.

Een opbouw van de meetkunde, in wezen niet gebruik makende van de aanschouwing, maar slechts van de axioma's en de daaruit door logische redenering afgeleide stellingen gaat ver boven het bevattingsvermogen van den gemiddelden leerling uit. De wiskundeleraar zal met beide benen op de grond dienen te blijven staan en ten volle rekening moeten houden met mogelijkheden van zijn leerlingen.

Wat wij echter steeds zien, is een poging tot een axiomatische opbouw, die reeds in het eerste leerjaar aanvangt. Er is mij geen methode bekend waar niet op één van de eerste bladzijden het

begrip axioma, zij het vaak ook na degelijke voorbereiding wordt ingevoerd. In vele gevallen worden slechts de meest evidente axioma's vermeld en laat men de minder voor de hand liggende terecht weg (continuïteitsaxioma!).

Ik geloof, dat in het algemeen deze pogingen weinig kans tot volledig slagen hebben. Ik vraag mij af, of een leerling van 12—13 jaar in staat is het begrip axioma — in zijn huidige vorm — tot zijn geestelijk eigendom te maken. Wij weten ook, dat vele meetkundebewijzen vaak „schijnbewijzen" zijn, gebruik als zij maken van nooit genoemde axioma's.

Terwijl wij dus enerzijds zeker niet voor honderd procent wetenschappelijk zijn, lopen wij anderzijds de kans het abstraherende vermogen van het kind veel te hoog aan te slaan.

Ik wil daarom een enkele beschouwing wijden aan de rol, die de aanschouwing in ons meetkunde-onderwijs kan spelen en beschouw in de eerste plaats de wetenschappelijke zijde hiervan.

Wanneer wij onze axioma's ontlenen aan de ruimte, waarin wij leven, als *„ervaringsfeiten"* dan doen wij niets anders dan een poging een meetkunde op te bouwen, die de ruimte, waarin wij leven, moet beschrijven. Wanneer wij ons dus op het standpunt stellen, dat wij een „ervaringsmeetkunde" opbouwen, die dus afhankelijk is van onze waarnemingen, die uiteraard „onjuist" kunnen zijn, dan hoeven wij niet zonder meer onwetenschappelijk te zijn. Wij kunnen immers gebaseerd op onze waarneming trachten een meetkunde op te bouwen, waarin elke optredende redenering voldoet aan twee eisen. In de eerste plaats dient hij duidelijk aan te geven, waar van de aanschouwing gebruik wordt gemaakt en in de tweede plaats dient hij logisch te zijn.

Wanneer wij zo te werk gaan, doordat wij de leerlingen met grote zorg en verstand de ruimte laten „ontdekken", dan sluiten wij aan bij hun geestelijke vermogens; wij hoeven het woord axioma niet te noemen, terwijl wij de leerlingen voor kunnen houden, dat onze meetkunde een sterk subjectief-experimenteel karakter draagt. Dit brengt ons er dan toe naarmate de leerling ouder wordt, het abstraherende element in het onderwijs in te brengen en te vergroten. Dit kan gebeuren in een tweede ronde, zoals de Zwitsers Gonseth en Marti dit in hun leerboek [1]) doen. Maar ook leent bv. de aanvang van het onderwijs in de stereometrie zich hiertoe uitstekend.

---

[1]) Gonseth u. Marti Planimetrie. Zie ook Euclides XIII, 4.

Ik kies, terugkerende tot mijn uitgangspunt, als voorbeeld de kennismaking met de rechte lijn in de aanvang van het meetkunde-onderwijs.

Dat door twee punten *één* rechte gaat, beschouwt elk kind als een trivialiteit. Men kan echter deze eigenschap ook laten zien als een middel om de rechte lijn te onderscheiden van andere lijnen bv. van de cirkel. Komen wij, wanneer de leerlingen dit „ontdekt" hebben, dan in wezen niet dichter bij het begrip axioma, zonder dat wij dit woord gebruiken? Hetzelfde geldt voor de „ontdekking" van de beweegbaarheid van een rechte in zich zelf (cirkel!) De beweegbaarheid van het platte vlak in zich zelf leidt tot de congruentie. Ik geloof trouwens, dat de bewegingen in het meetkunde-onderwijs een veel grotere rol moeten gaan spelen dan zij tot nu toe vaak deden.

Willen wij het meetkunde-onderwijs in de aanvang niet te zwaar belasten met „axiomatica" dan dienen wij consequent uit te gaan van onze ruimte die wij de leerling voorzetten als object van zijn uiterst voorzichtige waarneming. Het kind dient de ruimte, waarin hij leeft, te „ontdekken", dient er zich bewust van te worden, naarmate hij rijper wordt, dat de meetkunde, die zo opgebouwd wordt, een sterk subjectief karakter draagt en behoefte heeft aan abstrahering.

Wij dienen het begrip axioma met grote omzichtigheid te hanteren, opdat niet in de geest van vele leerlingen een verkeerde idee ervan blijft hangen, als zou bv. een axioma een stelling zijn, die niet bewezen hoeft te worden, maar wel als een soort afspraak, die eventueel veranderd kan worden.

Bij het onderwijs in de stereometrie met name bij de meetkunde op de bol (en niet in de vorm van de drievlakshoek), kan zeer veel leerzaams over de aard van de axioma's ter sprake komen, zonder dat het woord elliptische meetkunde genoemd wordt.

In de aanvang van het meetkunde-onderwijs moeten wij echter concreet zijn, schijn-wetenschappelijkheid vermijden, en het kind in staat stellen zijn geestelijke vermogens volledig te gebruiken.

BOEKBESPREKINGEN.

Max Landolt, Grösze, Maszzahl und Einheit. Zürich, Rascher Verlag 1943; 85 bldz., prijs fr. 5,80.

Het is een bekend feit, dat men op de teekens (veelal afkortingen), die eenheden aangeven, symbolische vermenigvuldigingen en deelingen kan toepassen; de notaties voor afgeleide eenheden in de gebruikelijke eenhedenstelsels zijn hiermede veelal in overeenstemming. De mogelijkheid van deze symbolische bewerkingen heeft men echter, naar ik meen, altijd als een ervaringsfeit beschouwd.

Het boekje van professor Landolt[1]) bestaat uit twee gedeelten; het eerste geeft practische voorbeelden van de berekeningen, waartoe de overgang op andere eenheden leidt, het tweede behandelt den theoretischen grondslag van het rekenen met grootheden en daarmee van de dimensieformules. Het is vooral het tweede gedeelte, dat ik in de aandacht der lezers van dit tijdschrift aanbeveel.

De schrijver duidt de grootheden aan door een hoofdletter, eventueel met een index, A_x; gelijksoortige worden met dezelfde hoofdletter geschreven. Er wordt nu een reflexief, omkeerbaar en transitief begrip gelijkheid ingevoerd: twee grootheden heeten gelijk, als zij elkander kunnen vervangen, hetgeen in verschillende gevallen op verschillende wijzen kan worden uitgemaakt, b.v. doordat langs experimenteelen weg kan worden vastgesteld of zij dezelfde uitwerking hebben. — Vaak komt het voor, dat twee tegelijk bestaande gelijksoortige grootheden A_a en A_b kunnen worden vervangen door ééne resultante A_c. Men schrijft dan

$$A_a * A_b = A_c;$$

de schrijver noemt dit de *quantitatieve verbinding* van A_a en A_b. De gelijksoortige grootheden blijken nu ten opzichte van deze quantitatieve verbinding eene groep te vormen, de quantitatieve groep. Door toepassing van de regels der abstracte algebra worden hiervan eigenschappen afgeleid, o.a. het bestaan van een quantitatief-neutraal element E_*, dat door quantitatieve verbinding geen wijziging veroorzaakt:

$$E_* * A_1 = A_1 * E_* = A_1.$$

Ter afkorting van de quantitatieve verbinding van *m* gelijke grootheden A voert men in de notatie $\overset{m}{A^*}$; dan kan men afleiden, dat als van de drie gelijkheden

$$\overset{m}{A_a{*}^a} = \overset{m}{A_b{*}^b} \qquad A_a = A_b \qquad m_a = m_b$$

er twee vervuld zijn, dit ook met de derde het geval is. Bestaat tusschen gelijksoortige grootheden de betrekking

$$A_1 = \overset{m}{A_2^*}$$

---

[1]) Mijn aandacht werd op dit, tijdens den oorlog verschenen, boek gevestigd door een artikel in het Zweedsche tijdschrift „Elementa", 27 (1944), blz. 151.

dan noemt men *m* het maatgetal van A_1 bij A_2 als eenheid; de betrekking laat zich uitbreiden tot rationale waarden van *m*.

Het komt vaak voor, dat twee of meer gelijksoortige of ongelijksoortige grootheden tot een werking of toestand aanleiding geven, die men als eene grootheid van andere soort beschouwt. Deze grootheden A en B leveren dan de nieuwe grootheid C door *qualitatieve verbinding*

$$A \circ B = C.$$

De grootheden van dezelfde of verschillende soort vormen met betrekking tot de qualitatieve verbinding de *qualitatieve groep*. De rekenregels voor deze qualitatieve verbinding zijn dezelfde als voor de quantitatieve, en de groep bevat een qualitatief-neutraal element E_0, zoo, dat

$$A \circ E_0 = E_0 \circ A = A.$$

Het verband tusschen de bewerkingen, die door 0 en $*$ zijn aangegeven, wordt gelegd door de formules

$$A^{\overset{l}{*}} \circ B = (A \circ B)^{\overset{l}{*}} \text{ en } A \circ B^{\overset{k}{*}} = (A \circ B)^{\overset{k}{*}}.$$

Zij nu A een eenheid, dan kan men afleiden

$$A^{\overset{m}{*}} = E_0^{\overset{m}{*}} \circ A,$$

waarmede eene nieuwe schrijfwijze voor eene grootheid met maatgetal *m* is gevonden.

Ten slotte wordt aangetoond, dat de quantitatieve machten van E_0, dus de symbolen $E_0^{\overset{m}{*}}$ met betrekking tot quantitatieve en qualitatieve verbinding een lichaam vormen, dat isomorph is met dat der rationale getallen met betrekking tot optelling en vermenigvuldiging

$$E_0^{\overset{m}{*}} \longleftrightarrow m,$$

waardoor men komt tot de schrijfwijze

$$A_x = A^{\overset{m}{*}} = m\,A,$$

die de grootheid als product van maatgetal en eenheid uitdrukt.

Het bovenstaande moge voldoende zijn, om den gedachtengang des schrijvers eenigszins aan te duiden. De behandeling in het boek is zeer duidelijk en uitvoerig, voor de herleidingen wordt niet naar de algebra verwezen, doch zij worden uitvoerig uitgewerkt, zoodat bij de lezers weinig kennis verondersteld wordt. Ik zou het interessante boek dan ook gaarne ter lezing aanbevelen.

Een probleem op zich zelf is, of, en zoo ja hoe, men de resultaten zou kunnen toepassen bij het onderwijs in mechanica en natuurkunde; de oplossing daarvan zie ik nog niet. J. H. S.

Prof. Dr. F. Schuh, Determinanten (Algebra I). Delft, Uitgeverij Waltman, 1945. 173 bldz.

Als eerste deel in Waltman's Technisch-Wetenschappelijke Serie is een boek van de hand van Prof. Schuh verschenen, dat (na eene inleiding over permutaties en combinaties, binomiale en polynomiale formule) de *determinanten* behandelt, met toepassing op de oplossing

van stelsels lineaire vergelijkingen. Maar ook de oplossing, van zulke stelsels zonder determinanten wordt behandeld.

Het werkje is uitvoerig en exact, en de theorie wordt aan een 250-tal voorbeelden (vraagstukken) verduidelijkt. Wie een afzonderlijk leerboek voor dit deel der wiskunde noodig heeft, zal zeker van deze nieuwe uitgave kunnen profiteeren.

J. H. S.

Ir. W. J. Vollewens, c.i. Repertorium der wiskunde voor ingenieurs. Deel IIIa, hoogere algebra en differentiaalrekening. Delft, Uitgeverij Waltman, 1946. 193 blz.

Een kort overzicht van eenige onderwerpen uit de hoogere algebra (determinanten met toepassing op lineaire vergelijkingen, hoogere machtsvergelijkingen en oneindig voortloopende reeksen) en van de differentiaalrekening met meetkundige toepassingen in 2 en 3 dimensies; een zeer kort hoofdstukje over functies eener complexe veranderlijke besluit het boek.

Het werk is in de eerste plaats bedoeld voor ingenieurs, om bij hun studie na te slaan wat zij vergeten mochten zijn, maar kan ook als leiddraad bij studie gebruikt worden. Door zijne beknoptheid is het voor beide doeleinden geschikt; men dient echter te bedenken, dat nagenoeg niet wordt ingegaan op de voorwaarden, waaronder de afgeleide resultaten gelden.

J. H. S.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr O. BOTTEMA.

VIII. *Prismoïde en obelisk.*

Vrij algemeen wordt de *prismoïde* tegenwoordig naar het voorbeeld van Jan de Vries gedefinieerd als een veelvlak, waarvan de hoekpunten gelegen zijn in twee evenwijdige vlakken. De algemene prismoïde ontstaat door in deze twee vlakken resp. een n_1- en een n_2-hoek te beschouwen (waarbij de gevallen $n = 1$ en $n = 2$ niet worden uitgesloten) en de figuur af te sluiten door $n_1 + n_2$ opstaande zijvlakken, die elk een hoekpunt van een der veelhoeken en een zijde van de andere bevatten. De mantel van het veelvlak bestaat dus uit een krans van $n_1 + n_2$ driehoeken.

Een bijzonder geval van deze figuur heeft de naam *obelisk* verkregen; het ontstaat als $n_1 = n_2 = n$, terwijl bovendien de zijden van de ene veelhoek evenwijdig zijn met die van de andere. Als begrenzende zijvlakken neemt men de vlakken door telkens twee dezer evenwijdige zijden: de mantel van de obelisk wordt dus gevormd door n trapezia.

Bij deze voorstelling, en zij is in de elementaire stereometrie gebruikelijk, is de obelisk dus een bijzonder geval van de prismoïde. Wij merken echter op, dat men ook de omgekeerde relatie verdedigen kan en de prismoïde (in de volgens de gebruikelijke opvatting niet gespecialiseerde zin) als een bijzonder geval van de obelisk beschouwen. Het komt ons voor, dat deze andere beschouwing uit theoretisch standpunt zelfs de voorkeur verdient.

Om te beginnen is het in het algemeen minder gebruikelijk om een veelvlak op te bouwen van de hoekpunten uit, dan van de begrenzende vlakken uit en bij de definitie b.v. van het prisma of van de afgeknotte-piramide volgt men steeds de laatste weg. Bepaalt men het *prisma* als een veelvlak begrensd door twee evenwijdige vlakken U_1 en U_2 en verder door een krans (d.w.z. een cyclisch gerangschikte rij) van zijvlakken, *welke alle evenwijdig zijn met één zelfde rechte,* dan kan men de *prismoïde,* daarbij recht doende aan zijn naam, definieren door de gecursiveerde woorden weg te laten. Bestaat de krans uit n vlakken en veronderstelt men nog, dat geen dezer met U_1 en U_2 evenwijdig is, dan ontstaat dus

een veelvlak, dat men gewend is obelisk te noemen en dat behalve door n trapezia nog door twee n-hoeken begrensd wordt. Bijzondere gevallen treden nu b.v. in, als drie op elkaar volgende vlakken van de krans een snijpunt hebben, dat in U_1 ligt. De n-hoek in U_1 krijgt dan twee samenvallende hoekpunten, dus een zijde met lengte nul en wordt naar het uiterlijk een (n — 1) hoek, terwijl een der begrenzende trapezia overgaat in een driehoek. Deze omstandigheid kan zich natuurlijk meer dan éèns voordoen en als een uiterste specialisatie ontmoeten wij dan het geval, waarbij alle trapezia in driehoeken zijn overgegaan en de veelhoeken in U_1 en U_2 voor geen enkele zijde nog paralleliteit vertonen doordat van elk paar evenwijdige zijden er één tot een punt verschrompelt — wij krijgen een veelvlak dat bij de andere opvatting juist het meest algemene geval vertegenwoordigt. Tegen de beschouwing van een n_1-hoek als een $n_1 + p$-hoek met samenvallende hoekpunten kan bij het onderwijs geen bezwaar bestaan, omdat het immers juist in de theorie van de prismoïde gebruikelijk is om onder omstandigheden grond- of bovenvlak tot rechten of punten te laten afnemen.

Heeft men een prismoïde, die volgens de gebruikelijke opvatting niet gespecialiseerd is en verplaatst men grond- en bovenvlak evenwijdig, dan ontstaat in het algemeen een obelisk, waaruit nog eens duidelijk blijkt, dat de „prismoïde" een bijzonder geval is van de „obelisk". De krans der mantelvlakken moet bijzonder gekozen worden, opdat een „prismoïde" ontstaan kan en dan is het nog noodzakelijk de vlakken U_1 en U_2 zeer bepaald te nemen, want anders is het voortgebrachte polyeder toch nog „maar" een „obelisk".

Tracht men de figuur analytisch te bepalen, door twee evenwijdige vlakken en een aantal andere vlakken, dan is men met de vergelijkingen der begrenzingen onmiddellijk klaar; veel omslachtiger zou het zijn op deze wijze een „algemene prismoïde" analytisch te omschrijven.

Bij onderzoekingen, welke met de prismoïdefiguur onmiddellijk samenhangen, zoals die naar „lineaire scharen van evenwijdige veelhoeken", die wij in beginsel aan M i n k o w s k i danken, moet men eveneens twee veelhoeken met evenwijdige zijden beschouwen en zou de figuur van grond- en bovenvlak van een „prismoïde" in de gebruikelijke zin de indruk maken van een gekunsteld bijzonder geval.

Zoals men weet kan het begrip prismoïde uitgebreid worden tot het geval waarbij de mantel een gebogen oppervlak is. Beschouwt men in het grond- en in het bovenvlak (convexe) krommen,

die men in dezelfde zin doorlopen denkt en verbindt men door een rechte elk punt van de ene kromme met datgene van de andere, waar de raaklijn evenwijdig en tevens gelijk gericht is, dan ontstaat een lichaam, dat in verschillende opzichten met de prismoïde overeenstemt en b.v. ook dezelfde inhoudsformule heeft. Het springt in het oog, dat deze generalisatie (en de daarmee samenhangende onderzoekingen betreffende „lineaire scharen van ei-krommen" en „de gemengde oppervlakte van twee ei-krommen") niet aansluit bij de in de schoolboeken gebruikelijke definitie, maar wel bij de figuur, die men gewend is obelisk te noemen.

Het lijkt mij overigens gewenst deze laatste term geheel af te schaffen en voor de algemene figuur de naam prismoïde te handhaven.

Verslag van het Congres van 30 Oct. j.l. te Amsterdam gehouden.

Het Bestuur van het Congres, dat op 30 October j.l. te Amsterdam is gehouden en georganiseerd door de Vereenigingen Liwenagel, Velines, Velebi en Wimecos, deelt mede, dat het verslag van dit Congres aan de deelnemers zal worden toegezonden, zoodra het gereed is. In verband met verschillende aanvragen om dit verslag zal het ook afzonderlijk verkrijgbaar worden gesteld en wel voor *f* 2,50 voor leden en voor *f* 3,50 voor niet-leden van bovengenoemde Vereenigingen. De tekst van de op dit Congres gehouden Voordrachten zal *alleen* in dit verslag worden gepubliceerd. In verband met de beperkte oplage moet het Bestuur aan iederen niet-deelnemer aan het Congres verzoeken, zich eventueel voor dit verslag zoo spoedig mogelijk op te geven. Dit moet geschieden bij den 2den Secretaris-Penningmeester van het Congres onder toezending per postwissel van het verschuldigde bedrag. In ieder geval moeten de opgaven voor 31 Januari a.s. binnen zijn gekomen.

Namens het Congresbestuur:

J. J. TEKELENBURG
2de Secretaris-Penningmeester,
Bergsche laan 13a, Rotterdam (N.).

WISKUNDIG DISPUUT

Te Rotterdam is opgericht het wiskundig dispuut
„Thomas Stieltjes".

Het ligt in de bedoeling enkele onderwerpen uit de moderne algebra in cursorisch verband gezamenlijk te bestuderen aan de hand van inleidingen door de leden zelf.

Begonnen zal worden met de groepentheorie.

De colloquia zullen worden gehouden eenmaal in de 3 weken.

Belangstellenden worden verzocht zich in verbinding te stellen met één der ondergetekenden:

Drs. H. Pleysier, Nobelstraat 105b, Rotterdam, (tel. 47554);
Dr. M. v. Vlaardingen, v. Beuningstr. 4 D, R'dam, (tel. 47259);
P. F. Wertheimer, Beukelsweg 27a, (tel. 31553).